Эта форма $\tilde{\omega}$ называется *симплектической формой*, а фазовое пространство с этой формой — *симплектическим многообразием.*

Упражнение 5.7. (a) Покажите, что f является интегралом движения, если функция Гамильтона H ли-инвариантна относительно поля $\bar{X}_f \doteq \overline{\mathrm{d}f}$:

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0. \tag{5.36}$$

(См. упр. 5.6.)

(b) Определим форму объёма $\tilde{\sigma}$ в фазовом пространстве формулой

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\tilde{\omega} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}}_{n \text{ раз}}, \tag{5.37}$$

где $2n$ — размерность фазового пространства. Покажите, что $\tilde{\sigma} \neq 0$ и что всякое гамильтоново векторное поле $\bar{U}$ имеет нулевую дивергенцию относительно этого элемента объёма. Иными словами, объём в фазовом пространстве сохраняется при эволюции системы во времени. Этот результат известен как *теорема Лиувилля.*

Упражнение 5.8. Сейчас мы докажем правильность сделанного в § 3.12 замечания относительно связи векторов Киллинга и сохраняющихся величин. Для движущейся частицы координаты фазового пространства суть $\{q^A, p_A\} = \{x^i, p_i = mv_i\}$, а функция Гамильтона равна $H = (1/2m)g^{ij}p_ip_j + \Phi(x^i)$. Докажите, что если $\bar{U}$ — вектор Киллинга и функция Φ постоянна вдоль $\bar{U}$, то «сопряжённый момент» вектора Киллинга $p_{\bar{U}} \equiv U^i p_i$ является сохраняющейся величиной. (Указание: Используя упр. 5.7, определите $\bar{X}_f$ как векторное поле в фазовом пространстве, у которого пространственные компоненты те же, что и у $\bar{U}$, а импульсные компоненты нулевые. Покажите, что

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0,$$

и найдите f из формулы (5.31).)

5.9. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Особенно просто и наглядно формулируются законы сохранения в случае линейных систем. Линейной называется динамическая система, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H = \sum_{A,B=1}^{n} (T^{AB}p_Ap_B + V_{AB}q^Aq^B), \tag{5.38}$$

где T^{AB} и V_{AB} не зависят от p_A и q^A. Такая система называется линейной потому, что её уравнения движения линейны по $\{q^A, p_A\}$:

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^A} = -\sum_B V_{AB} q^B, \tag{5.39}$$

$$\frac{dq^A}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_A} = \sum_B T^{AB} p_B. \tag{5.40}$$

Заметим, что можно считать $T^{AB} = T^{BA}$ и $V_{AB} = V_{BA}$, поскольку антисимметричная часть, скажем, T^{AB}, после свёртки с симметричным выражением $p_A p_B$ не даёт вклада в H.

Линейность системы гарантирует, что если $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}\}$ и $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$ — решения, то и $\{\alpha q^A_{(1)} + \beta q^A_{(2)}, \alpha p_{(1)A} + \beta p_{(2)A}\}$ будет решением при любых α и β. Поэтому фазовое пространство — это не просто многообразие, оно обладает естественной структурой векторного пространства. Конечно же, векторное пространство — это частный случай многообразия, так как его можно отобразить в R^n, но это такое многообразие, которое может быть *отождествлено* с касательным пространством в любой его точке. А именно, поскольку кривая в векторном пространстве есть последовательность векторов, зависящая от параметра, а касательный вектор есть просто результат дифференцирования по этому параметру, то он тоже является элементом этого векторного пространства. Более того, *все* касательные пространства T_P естественно отождествляются друг с другом; мы можем говорить о равенстве векторов из разных T_P, просто сравнивая их компоненты. (Это значит, что векторное пространство является плоским многообразием, см. гл. 6.)

Поскольку точка фазового пространства является вектором, мы можем использовать симплектическую форму $\tilde{\omega}$ для определения скалярного произведения элементов фазового пространства. Если $\bar{Y}_{(1)}$ — вектор с компонентами $\{q^A_{(1)}, p_{(1)A}, A = 1, \ldots, N\}$, а $\bar{Y}_{(2)}$ имеет соответственно компоненты $\{q^A_{(2)}, p_{(2)A}\}$, то их *симплектическое скалярное произведение* (или *кососкалярное произведение*) определяется как

$$\tilde{\omega}(\bar{Y}_{(1)}, \bar{Y}_{(2)}) = \sum_A (q^A_{(1)} p_{(2)A} - q^A_{(2)} p_{(1)A}). \tag{5.41}$$

Если $\bar{Y}_{(1)}(t)$ и $\bar{Y}_{(2)}(t)$ — траектории системы, то их симплектическое скалярное произведение не зависит от времени. Чтоб это доказать, мы просто подставим уравнения движения в формулу для $\mathrm{d}\tilde{\omega}(\bar{Y}_{(1)}, \bar{Y}_{(2)})/\mathrm{d}t$ (по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^A_{(1)})\, p_{(2)\,A} + q^A_{(1)}\frac{d}{dt}p_{(2)\,A}$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^A_{(2)})\, p_{(1)\,A} - q^A_{(2)}\frac{d}{dt}p_{(1)\,A}$$
$$= T^{AB}p_{(1)\,B}p_{(2)\,A} + V_{AB}q^A_{(1)}q^B_{(2)}$$
$$-T^{AB}p_{(1)\,A}p_{(2)\,B} - V_{AB}q^A_{(2)}q^B_{(1)}.$$

Из симметричности T^{AB} и V_{AB} следует, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\omega}(\overline{Y}_{(1)}, \overline{Y}_{(2)}) = 0, \tag{5.42}$$

если $\overline{Y}_{(1)}$ и $\overline{Y}_{(2)}$ — решения.

Симплектическое скалярное произведение позволяет довольно изящно определить некоторые из *сохраняющихся величин*, связанных с решениями. На первый взгляд это не кажется очевидным: хотя симплектическое скалярное произведение и сохраняется, но, умножив решение само на себя, мы получим тождественный нуль. Фокус заключается в том, что, воспользовавшись инвариантностью системы (т. е. инвариантностью T^{AB} и V_{AB}), мы можем получить из одного решения $\overline{Y}$ другое, тесно с ним связанное. Например, допустим, что T^{AB} и V_{AB} не зависят от времени. Тогда уравнения движения показывают, что если $\overline{Y}(t)$ — решение, то $\mathrm{d}\overline{Y}/\mathrm{d}t$ — тоже решение. И мы определяем каноническую энергию E_c решения $\overline{Y}$ как

◆ $$E_C(\overline{Y}) = \tilde{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{Y}}{\mathrm{d}t}, \overline{Y}\right). \tag{5.43}$$

Легко проверить, что $E_c(\overline{Y})$ есть в точности значение функции Гамильтона на решении $\overline{Y}$.

Так же легко получать и другие сохраняющиеся величины. Обычно бывает, что T^{AB} и V_{AB} зависят от координат $\{x^i\}$ многообразия, на котором задана динамическая система (эвклидово пространство для нерелятивистской динамики). Если, как в упр. 5.8, найдётся векторное поле $\overline{U}$, такое что

$$\pounds_{\overline{U}}T^{AB} = 0 = \pounds_{\overline{U}}V_{AB}, \tag{5.44}$$

то существуют связанные с $\overline{U}$ сохраняющиеся величины. (Вычисляя $\pounds_{\overline{U}}T^{AB}$, важно иметь в виду различие между индексами A, B, относящимися к координатам в фазовом пространстве, и тензорными свойствами T^{AB} на исходном многообразии. На нём величины T^{AB} могут быть скалярами или тензорами в зависимости от того, что́ представляют из себя q^A. Индексы A и B всего лишь *метки*, они вовсе не указывают на то, что с T^{AB} надо обращаться как с тензором типа $\binom{2}{0}$ при вычислении производной Ли по направлению $\bar{U}$, поскольку $\bar{U}$ — это вектор в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Как и раньше, если $\bar{Y}$ — решение, то и $\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}$ — решение. (Опять то же замечание: это производная в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Итак, определим канонический *$\bar{U}$-импульс* формулой

$$\blacklozenge \quad P_{\bar{U}}(\bar{Y}) = \tilde{\omega}(\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}, \bar{Y}). \tag{5.45}$$

Читатель может на простых примерах, вроде того что дан в упр. 5.8, убедиться[1], что обычные сохраняющиеся величины действительно так получаются.

Хотя наше обсуждение ограничивалось системами с конечным числом (N) степеней свободы, развитый формализм прямо обобщается на непрерывные системы, такие как системы, описываемые волновым уравнением. Знакомый с уравнением Клейна — Гордона читатель может узнать симплектическое скалярное произведение: интеграл от сохраняющейся плотности тока $\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*$ как раз и есть (с точностью до постоянных множителей) $\tilde{\omega}(\psi^*, \psi)$. Обсуждение канонических сохраняющихся величин для случая волн в жидкости с приложением к вопросам устойчивости можно найти в работе Friedman & Schutz (1978), указанной в библиографии в конце главы.

5.10. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И РАССЛОЕНИЯ

В § 5.4 мы определили фазовое пространство как многообразие с координатами p и q. Это определение таит в себе множество важных и интересных структур. Пусть динамическая система имеет N координат $\{q^i\}$, отвечающих её N степеням свободы. Они определяют многообразие M, называемое *конфигурационным пространством*, и эволюция динамической системы во времени описывается кривой $q^i(t)$ в M. Функция Лагранжа $\mathscr{L}$ зависит от q^i и $\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$ и, следовательно, является функцией на касательном расслоении TM. Покажем, что импульс

$$p_i = \partial\mathscr{L}/\partial(q^i{}_{,t}) \tag{5.46}$$

есть поле один-форм на M, т. е. сечение кокасательного расслоения T^*M. Мы покажем это, установив, как преобразуется импульс при замене координат. Введём на M новые координаты

$$Q^{i'} = Q^{i'}(q^i). \tag{5.47}$$

[1] Это далеко не просто. — *Прим. перев.*