6.10. ПЛОСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Аксиома Эвклида о параллельных служит определяющей аксиомой *плоского* пространства. Как ясно из (6.28), пространство плоско тогда и только тогда, когда его тензор Римана равен нулю. Таким образом, тензор Римана есть мера *кривизны* многообразия со связностью. В плоском пространстве, как следует из (6.27), есть *глобальное* понятие параллельности: можно говорить, что вектор в точке P параллелен вектору в точке Q, ибо его можно параллельно перенести в Q способом, не зависящим от пути. Поэтому в плоском пространстве можно отождествить все касательные пространства T_P. Более того, экспоненциальное отображение можно продолжать бесконечно (при условии, что глобальная топология многообразия не усложнена искусственно «резкой» и «склейкой») и всё многообразие можно отождествить с его касательным пространством. Обратите внимание, что метрический тензор во всём этом не участвует. Пространство Минковского так же плоско, как и эвклидово пространство.

Упражнение 6.16. Рассмотрим двумерное плоское пространство с декартовыми координатами x, y и полярными координатами r, θ.

(a) Используя то, что векторы $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ параллельны сами себе глобально (для любых P и Q вектор $\bar{e}_x(P)$ параллелен вектору $\bar{e}_x(Q)$), покажите, что

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = 1/r,$$

а все остальные Γ в полярных координатах равны нулю.

(b) Для произвольного векторного поля $\bar{V}$ выразите $\nabla_i V^j$ и $\nabla_i V^i$ для случая полярных координат через V^r и V^θ.

(c) Для базиса $\hat{r} \equiv \partial/\partial r$, $\hat{\theta} \equiv (1/r)\partial/\partial\theta$ найдите все символы Кристоффеля.

(d) Выполните задание (b) для базиса из (c).

Это упражнение устанавливает следующий важный факт: хотя на плоском многообразии существуют системы координат, в которых $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ повсюду, можно выбрать координаты, в которых они *ненулевые*.

6.11. СОГЛАСОВАННОСТЬ СВЯЗНОСТИ С ОБЪЁМОМ ИЛИ МЕТРИКОЙ

Если на многообразии помимо связности задана ещё форма объёма или метрика, то, как правило, на неё налагаются некоторые дополнительные ограничения. Например, как связность, так и форма объёма могут задавать дивергенцию векторного поля $\bar{V}$. *Ковариантная дивергенция* — это $\nabla \cdot \bar{V} \equiv \nabla_i V^i$,