6.10. ПЛОСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Аксиома Эвклида о параллельных служит определяющей аксиомой *плоского* пространства. Как ясно из (6.28), пространство плоско тогда и только тогда, когда его тензор Римана равен нулю. Таким образом, тензор Римана есть мера *кривизны* многообразия со связностью. В плоском пространстве, как следует из (6.27), есть *глобальное* понятие параллельности: можно говорить, что вектор в точке P параллелен вектору в точке Q, ибо его можно параллельно перенести в Q способом, не зависящим от пути. Поэтому в плоском пространстве можно отождествить все касательные пространства T_P. Более того, экспоненциальное отображение можно продолжать бесконечно (при условии, что глобальная топология многообразия не усложнена искусственно «резкой» и «склейкой») и всё многообразие можно отождествить с его касательным пространством. Обратите внимание, что метрический тензор во всём этом не участвует. Пространство Минковского так же плоско, как и эвклидово пространство.

Упражнение 6.16. Рассмотрим двумерное плоское пространство с декартовыми координатами x, y и полярными координатами r, θ.

(a) Используя то, что векторы $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ параллельны сами себе глобально (для любых P и Q вектор $\bar{e}_x(P)$ параллелен вектору $\bar{e}_x(Q)$), покажите, что

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = 1/r,$$

а все остальные Γ в полярных координатах равны нулю.

(b) Для произвольного векторного поля $\bar{V}$ выразите $\nabla_i V^j$ и $\nabla_i V^i$ для случая полярных координат через V^r и V^θ.

(c) Для базиса $\hat{r} \equiv \partial/\partial r$, $\hat{\theta} \equiv (1/r)\partial/\partial\theta$ найдите все символы Кристоффеля.

(d) Выполните задание (b) для базиса из (c).

Это упражнение устанавливает следующий важный факт: хотя на плоском многообразии существуют системы координат, в которых $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ повсюду, можно выбрать координаты, в которых они *ненулевые*.

6.11. СОГЛАСОВАННОСТЬ СВЯЗНОСТИ С ОБЪЁМОМ ИЛИ МЕТРИКОЙ

Если на многообразии помимо связности задана ещё форма объёма или метрика, то, как правило, на неё налагаются некоторые дополнительные ограничения. Например, как связность, так и форма объёма могут задавать дивергенцию векторного поля $\bar{V}$. *Ковариантная дивергенция* — это $\nabla\cdot\bar{V} \equiv \nabla_i V^i$, а дивергенция относительно формы объёма определяется формулой

$$\pounds_{\bar V}\tilde\omega = (\operatorname{div}_{\tilde\omega}\bar V)\,\tilde\omega.$$

Мы говорим, что ∇ и $\tilde\omega$ *согласованы*, если $\operatorname{div}_{\tilde\omega}\bar V = \nabla\cdot\bar V$ для всех $\bar V$.

Упражнение 6.17. (a) Покажите, что ∇ и $\tilde\omega$ согласованы тогда и только тогда, когда $\nabla\tilde\omega = 0$. (Указание: для вычисления $\pounds_{\bar V}\tilde\omega$ используйте упр. 6.11.)

(b) Предположим, что $\omega_{12\dots n} = f$ в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Покажите, что ∇ и $\tilde\omega$ согласованы тогда и только тогда, когда для всех k

$$(\ln f)_{,k} = \Gamma^j{}_{jk}.$$

Аналогично если на многообразии задан метрический тензор, то имеется естественное требование согласованности. А именно, для любых двух векторов $\bar A$ и $\bar B$ в точке P определено скалярное произведение $\mathbf{g}(\bar A, \bar B)$. Мы говорим, что ∇ и $\mathbf{g}$ *согласованы*, если это скалярное произведение сохраняется при параллельном переносе $\bar A$ и $\bar B$ вдоль каждой кривой.

Упражнение 6.18. (a) Покажите, что ∇ и $\mathbf{g}$ согласованы тогда и только тогда, когда

$$\nabla\mathbf{g} = 0. \tag{6.29}$$

(b) Покажите, что в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ условие согласованности имеет вид

$$\Gamma^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2} g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}). \tag{6.30}$$

Здесь g^{ij} — элементы обратной к g_{lm} матрицы (см. (2.55)). (Указание: используйте симметрию $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$.)

Упражнение 6.19. Напомним (см. упр. 4.13), что, когда имеется метрика, можно определить выделенную форму объёма. (Это ещё один вид согласованности, на этот раз метрики и формы объёма.) Покажите, что если метрика и связность согласованы, то выделенная форма объёма и связность тоже согласованы. (Указание: надо убедиться в том, что $g_{,k} = g g^{ij} g_{ij,k}$; для этого используйте (4.19).)

Равенство (6.30) выявляет тот замечательный факт, что метрика однозначно определяет согласованную с ней связность. Такая связность называется *метрической связностью.*

Упражнение 6.20. Покажите, что для произвольного вектора $\bar V$

$$(\pounds_{\bar V}\mathbf{g})_{ij} = \nabla_i V_j + \nabla_j V_i.$$

Следовательно, вектор Киллинга (см. § 3.11) удовлетворяет *уравнению Киллинга*

$$\nabla_i V_j + \nabla_j V_i = 0.$$

Ср. с уравнением (5.89).

6.12. МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Поскольку (6.30) налагает на связность жесткие ограничения, метрическая связность обладает дополнительными свойствами, которых у произвольной симметричной связности нет. Вывести некоторые из этих свойств проще всего в нормальных координатах. Заметим, что из (6.29) и (6.30) следует, что

$$\Gamma^i{}_{jk} = 0 \text{ в точке } P \Leftrightarrow g_{lm,\,n} = 0 \text{ в точке } P. \tag{6.31}$$

Упражнение 6.21. Покажите, что из (6.20), (6.30) и (6.31) вытекает, что в нормальных координатах в точке P

$$R_{ijkl} \equiv g_{im} R^m{}_{jkl} = \tfrac{1}{2}\left(g_{il,\,jk} - g_{ik,\,jl} + g_{jk,\,il} - g_{jl,\,ik}\right). \tag{6.32}$$

Упражнение 6.22. (a) Покажите, что из (6.32) следует тождество

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{6.33}$$

(b) Покажите, что из (6.33) и (6.23) следует, что на n-мерном многообразии число линейно-независимых компонент R_{ijkl} равно

$$\frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) = \\ = \frac{1}{12} n^2(n^2-1).$$

Упражнение 6.23. (a) Определим тензор R_{kl}, называемый *тензором Риччи*, формулой

$$R_{kl} = R^i{}_{kil} \tag{6.34}$$

и скалярную кривизну формулой

$$R = g^{kl} R_{kl}. \tag{6.35}$$

Покажите, что тензор R_{ij} *симметричен.*

(b) Покажите, что из свёрнутых тождеств Бьянки

$$R^i{}_{j[il;m]} = 0 \quad \text{и} \quad g^{jl} R^i{}_{j[il;m]} = 0$$

следует, что

$$\left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}\right)_{;j} = 0. \tag{6.36}$$