Следовательно, вектор Киллинга (см. § 3.11) удовлетворяет *уравнению Киллинга*

$$\nabla_i V_j + \nabla_j V_i = 0.$$

Ср. с уравнением (5.89).

6.12. МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Поскольку (6.30) налагает на связность жесткие ограничения, метрическая связность обладает дополнительными свойствами, которых у произвольной симметричной связности нет. Вывести некоторые из этих свойств проще всего в нормальных координатах. Заметим, что из (6.29) и (6.30) следует, что

$$\Gamma^i{}_{jk} = 0 \text{ в точке } P \Leftrightarrow g_{lm,\,n} = 0 \text{ в точке } P. \tag{6.31}$$

Упражнение 6.21. Покажите, что из (6.20), (6.30) и (6.31) вытекает, что в нормальных координатах в точке P

$$R_{ijkl} \equiv g_{im} R^m{}_{jkl} = \frac{1}{2}\left(g_{il,\,jk} - g_{ik,\,jl} + g_{jk,\,il} - g_{jl,\,ik}\right). \tag{6.32}$$

Упражнение 6.22. (a) Покажите, что из (6.32) следует тождество

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{6.33}$$

(b) Покажите, что из (6.33) и (6.23) следует, что на n-мерном многообразии число линейно-независимых компонент R_{ijkl} равно

$$\frac{1}{8} n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{12} n^2(n^2-1).$$

Упражнение 6.23. (a) Определим тензор R_{kl}, называемый *тензором Риччи*, формулой

$$R_{kl} = R^i{}_{kil} \tag{6.34}$$

и скалярную кривизну формулой

$$R = g^{kl} R_{kl}. \tag{6.35}$$

Покажите, что тензор R_{ij} *симметричен.*

(b) Покажите, что из свёрнутых тождеств Бьянки

$$R^i{}_{j[il;m]} = 0 \quad \text{и} \quad g^{jl} R^i{}_{j[il;m]} = 0$$

следует, что

$$\left(R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}\right)_{;j} = 0. \tag{6.36}$$

(Индексы у R^{ij} поднимаются с помощью метрики: $R^{ij} = g^{il}g^{jm}R_{lm}$.)

(c) Определим *тензор Вейля* формулой

$$C^{ij}{}_{kl} = R^{ij}{}_{kl} - 2\delta^{[i}{}_{[k}R^{j]}{}_{l]} + \frac{1}{3}\delta^{[i}{}_{[k}\delta^{j]}{}_{l]}R. \tag{6.37}$$

Покажите, что любая свёртка C_{ijkl} по индексам даёт нуль — это «чистый» тензор четвёртого ранга.

Равенство (6.36) играет важную роль в эйнштейновой теории гравитации — общей теории относительности. Пространство-время в этой теории есть обобщение плоского пространства Минковского — четырёхмерное многообразие с метрикой. Гравитационное поле (т. е. метрика) в пустом пространстве (без материи) находится как решение дифференциальных уравнений

$$G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2}Rg^{ij} = 0. \tag{6.38}$$

Тензор G^{ij} называется *тензором Эйнштейна*. Тождества (6.36) понижают число независимых уравнений в (6.38) от 10 $\left(= \frac{1}{2}n(n-1)\right.$, поскольку G^{ij} симметричен) до 6. Это гарантирует, что решение g_{ij}, тоже имеющее 10 независимых компонент, определяется с точностью до четырёх функциональных степеней свободы, которым в свою очередь соответствуют координатные преобразования g_{ij}.

Упражнение 6.24. Покажите, что соединяющая точки P и Q геодезическая есть кривая экстремальной длины среди всех кривых, соединяющих эти точки. А именно, покажите, что с точностью до первого порядка

$$\int_P^Q \left| \mathrm{g}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\right|^{1/2} d\lambda$$

не меняется при отклонениях $x^i(\lambda)$ от геодезической. (Имейте в виду, что параметр каждой кривой определяется однозначно; параметр геодезической должен быть аффинным.) Обдумайте вопрос о необходимости знака модуля в случае индефинитной метрики и отдельно обдумайте случай нулевой геодезической (геодезической нулевой длины).

6.13. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Мы все обучались основам физики и геометрии, изучая плоские многообразия: эвклидово трёхмерное пространство, галилеево пространство-время (хотя, возможно, его так и не