(Индексы у R^{ij} поднимаются с помощью метрики: $R^{ij} = g^{il}g^{jm}R_{lm}$.)

(c) Определим *тензор Вейля* формулой

$$C^{ij}{}_{kl} = R^{ij}{}_{kl} - 2\delta^{[i}{}_{[k}R^{j]}{}_{l]} + \frac{1}{3}\delta^{[i}{}_{[k}\delta^{j]}{}_{l]}R. \tag{6.37}$$

Покажите, что любая свёртка C_{ijkl} по индексам даёт нуль — это «чистый» тензор четвёртого ранга.

Равенство (6.36) играет важную роль в эйнштейновой теории гравитации — общей теории относительности. Пространство-время в этой теории есть обобщение плоского пространства Минковского — четырёхмерное многообразие с метрикой. Гравитационное поле (т. е. метрика) в пустом пространстве (без материи) находится как решение дифференциальных уравнений

$$G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2}Rg^{ij} = 0. \tag{6.38}$$

Тензор G^{ij} называется *тензором Эйнштейна*. Тождества (6.36) понижают число независимых уравнений в (6.38) от 10 $\left(= \frac{1}{2}n(n-1)\right.$, поскольку G^{ij} симметричен) до 6. Это гарантирует, что решение g_{ij}, тоже имеющее 10 независимых компонент, определяется с точностью до четырёх функциональных степеней свободы, которым в свою очередь соответствуют координатные преобразования g_{ij}.

Упражнение 6.24. Покажите, что соединяющая точки P и Q геодезическая есть кривая экстремальной длины среди всех кривых, соединяющих эти точки. А именно, покажите, что с точностью до первого порядка

$$\int_P^Q \left| \mathrm{g}\left(\frac{d\bar{x}}{d\lambda}, \frac{d\bar{x}}{d\lambda}\right)\right|^{1/2} d\lambda$$

не меняется при отклонениях $x^i(\lambda)$ от геодезической. (Имейте в виду, что параметр каждой кривой определяется однозначно; параметр геодезической должен быть аффинным.) Обдумайте вопрос о необходимости знака модуля в случае индефинитной метрики и отдельно обдумайте случай нулевой геодезической (геодезической нулевой длины).

6.13. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Мы все обучались основам физики и геометрии, изучая плоские многообразия: эвклидово трёхмерное пространство, галилеево пространство-время (хотя, возможно, его так и не называли), а потом (если довелось) пространство-время Минковского. С другой стороны, общая теория относительности использует искривлённое пространство-время, и кажется естественным представлять себе плоское пространство как простейший вид пространств. Но с точки зрения теории многообразий даже плоское пространство вовсе не просто: по сравнению с обычным дифференцируемым многообразием оно имеет гораздо более богатую структуру, ибо на нём задана аффинная связность. В элементарной геометрии и физике присутствие этой связности не ощущается, поскольку, как правило, применяют прямоугольные системы координат, в которых символы Кристоффеля обращаются в нуль. Однако, если физические законы сформулированы в плоском пространстве на языке криволинейных координат, в которых символы Кристоффеля уже придётся использовать, связность становится наблюдаемой.

На первый взгляд это ненужное усложнение, но посмотрим, какие в нём содержатся возможности для обобщений. В большинство так записанных физических законов входят символы Кристоффеля, а не тензор Римана, следовательно, их уравнения осмыслены и выглядят одинаково вне зависимости от того, плоско наше многообразие или криво. Таким образом, естественно постулировать, что математическая форма физических законов в искривлённом пространстве-времени общей теории относительности в точности та же, что и в криволинейных координатах плоского пространства Минковского. Такой постулат называется *принципом минимальной связи* (физических полей с кривизной пространства-времени) или *сильным принципом эквивалентности*. Это широко принятый постулат, который согласуется с экспериментом. Подробно он обсуждается в книге Мизнера и др. (1977). Здесь же стоит подчеркнуть то весьма замечательное обстоятельство, что, записывая «плоские» физические законы в криволинейной системе координат, мы находим их вид в искривлённом пространстве. Это обстоятельство объясняется тем, что плоские пространства, хотя у них и нулевая кривизна, имеют вполне определённую связность, а потому являются просто частным случаем искривлённого пространства.

6.14. СВЯЗНОСТИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Под названием «калибровочные теории» объединяется целое множество разнообразных теорий взаимодействия элементарных частиц. Все они обладают одним общим свойством: их физические предсказания инвариантны относительно группы преобразований основных полевых переменных. Наиболее известный пример — это теория электромагнетизма: если вы-