называли), а потом (если довелось) пространство-время Минковского. С другой стороны, общая теория относительности использует искривлённое пространство-время, и кажется естественным представлять себе плоское пространство как простейший вид пространств. Но с точки зрения теории многообразий даже плоское пространство вовсе не просто: по сравнению с обычным дифференцируемым многообразием оно имеет гораздо более богатую структуру, ибо на нём задана аффинная связность. В элементарной геометрии и физике присутствие этой связности не ощущается, поскольку, как правило, применяют прямоугольные системы координат, в которых символы Кристоффеля обращаются в нуль. Однако, если физические законы сформулированы в плоском пространстве на языке криволинейных координат, в которых символы Кристоффеля уже придётся использовать, связность становится наблюдаемой.

На первый взгляд это ненужное усложнение, но посмотрим, какие в нём содержатся возможности для обобщений. В большинство так записанных физических законов входят символы Кристоффеля, а не тензор Римана, следовательно, их уравнения осмыслены и выглядят одинаково вне зависимости от того, плоско наше многообразие или криво. Таким образом, естественно постулировать, что математическая форма физических законов в искривлённом пространстве-времени общей теории относительности в точности та же, что и в криволинейных координатах плоского пространства Минковского. Такой постулат называется *принципом минимальной связи* (физических полей с кривизной пространства-времени) или *сильным принципом эквивалентности*. Это широко принятый постулат, который согласуется с экспериментом. Подробно он обсуждается в книге Мизнера и др. (1977). Здесь же стоит подчеркнуть то весьма замечательное обстоятельство, что, записывая «плоские» физические законы в криволинейной системе координат, мы находим их вид в искривлённом пространстве. Это обстоятельство объясняется тем, что плоские пространства, хотя у них и нулевая кривизна, имеют вполне определённую связность, а потому являются просто частным случаем искривлённого пространства.

6.14. СВЯЗНОСТИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Под названием «калибровочные теории» объединяется целое множество разнообразных теорий взаимодействия элементарных частиц. Все они обладают одним общим свойством: их физические предсказания инвариантны относительно группы преобразований основных полевых переменных. Наиболее известный пример — это теория электромагнетизма: если выбрать в качестве основной переменной один-форму («вектор») потенциала $\tilde{A}$, то физические предсказания теории инвариантны относительно калибровочных преобразований $\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}f$. Общее обсуждение калибровочных теорий выходит за рамки этой книги (см. Trautman, 1973), и мы ограничимся здесь электродинамикой, поясняя всё на примере уравнения движения заряженной бесспиновой частицы массы m. Мы увидим, что естественно появится связность, другая, но играющая ту же роль, что и аффинная, и эта связность приведёт нас к «открытию» электромагнитного поля!

Сначала рассмотрим нейтральную скалярную частицу массы m, волновая функция которой ψ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона и (сохраняющемуся) условию нормировки:

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2)\psi = 0, \qquad \int d^3x\,(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*) = 1, \tag{6.39}$$

где греческие индексы пробегают (t, x, y, z); мы предположили для простоты, что взята метрика Минковского. Очевидно, что если ψ — решение, то и $\psi e^{i\varphi}$, где φ — произвольное вещественное число, тоже будет решением. Таким образом, $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ — калибровочное преобразование. Теперь проведём аналогию, которой будем пользоваться на протяжении всего последующего обсуждения. Наши калибровочные преобразования чрезвычайно ограниченны, поскольку φ не может зависеть от точки. Это похоже на инвариантность относительно выбора координат при описании некоторых (всех) физических систем в прямоугольных координатах специальной теории относительности. Допустимые координатные преобразования — это вращения, лоренцевы бусты и трансляции, и все они «жёсткие»: нельзя в одной точке выполнять одно преобразование, а в другой — другое. Ослабление этого ограничения, необходимое, если мы хотим использовать произвольные системы координат, заставляет нас, как мы видели в предыдущем параграфе, ввести аффинную связность, — иначе мы не сможем определить не зависящую от выбора координат ковариантную производную. Но если уж уравнения движения физической системы записаны в терминах связности, то естественно использовать их и тогда, когда связность уже не является плоской. И они оказываются подходящими уравнениями для рассматриваемых систем в *общей* теории относительности. Итак, методика, основанная на использовании свободы в выборе системы координат, привела нас к теории, описывающей, как система взаимодействует с гравитационным полем. Подобным же образом мы увеличим теперь калибровочную свободу поля ψ — и автоматически придём к теории, описывающей, как гравитационное поле взаимодействует с электромагнитным полем.

Обобщение очевидно: нам нужны калибровочные преобразования общего вида

$$\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}, \tag{6.40}$$

где теперь φ — произвольная функция точки $\bar{x}$ в пространстве Минковского. Но поскольку в уравнения поля входят производные, мы получаем

$$\tilde{d}\psi \to (\tilde{d}\psi + i\psi\tilde{d}\varphi)\, e^{i\varphi(\bar{x})}. \tag{6.41}$$

Для того чтоб понять, как избавиться от лишнего члена, посмотрим на дело более геометрически. Множитель $e^{i\varphi}$ — это комплексное число на единичной окружности; калибровочное преобразование — это представление группы $U(1)$ (унитарной группы в одномерном комплексном пространстве) её действием на ψ. Поэтому преобразование $\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}$ можно представлять себе так: в каждой точке $\bar{x}$ выбирается элемент из $U(1)$ и действует на ψ. Геометрический объект, отвечающий этой картине, — это *расслоение*, причём пространство Минковского играет роль базы, а группа $U(1)$ — слоя (его можно представлять в виде единичной окружности на комплексной плоскости). Тогда калибровочные преобразования (6.40) будут сечениями этого расслоения, которое мы назовём *$U(1)$-расслоением.*

Объект, которым мы теперь хотим заняться, — это не сама ψ, а $\nabla_\mu\psi$ — элемент из T^*_P, векторного пространства один-форм в точке P. Рассмотрим на базе кривую $\mathscr{C}$ с параметром λ. Двигаясь по кривой, мы последовательно встречаемся с один-формами $\tilde{d}\psi$, по одной в каждой точке. Если ψ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (6.39), то мы будем говорить, что $\tilde{d}\psi$ меняется вдоль $\mathscr{C}$ «правильным» образом. У нас есть ограниченный набор калибровочных преобразований ($\varphi = \text{const}$), для которых новая форма $\tilde{d}\psi$ тоже «правильная». Но представим себе, что мы сделали произвольное калибровочное преобразование. Тогда кривой $\mathscr{C}$ на базе соответствует кривая $\mathscr{C}^*$ в $U(1)$-расслоении: в каждом слое, лежащем над точкой $\bar{x}$ кривой $\mathscr{C}$, она проходит через элемент $e^{i\varphi(\bar{x})}$. Если преобразование не постоянно (если $\mathscr{C}^*$ не «параллельна» $\mathscr{C}$), то градиент преобразованной ψ не будет «правильным»: он не будет равен градиенту исходной ψ с точностью до фазы. Поэтому мы определим на базе *один-форму связности* $\tilde{A}$, зависящую от кривой $\mathscr{C}^*$ таким образом, чтобы это «исправило» производную ψ. Определение будет следующее:

(i) Если ψ — решение (6.39), то $\tilde{A} = 0$.

(ii) При преобразовании $\psi \to \psi e^{i\varphi(\bar{x})}$ один-форма связности преобразуется по правилу

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}\varphi. \tag{6.42}$$

(iii) *Калибровочно-ковариантная производная* ψ определяется формулой

$$\tilde{D}\psi = \tilde{d}\psi - i\psi\tilde{A}. \tag{6.43}$$

Свойства (ii) и (iii) означают, что при калибровочном преобразовании $\tilde{D}\psi$ переходит в $e^{i\varphi(\bar{x})}\tilde{D}\psi$; свойство (i) гарантирует, что $\tilde{D}\psi$ «правильна» на $\mathscr{C}$.

Теперь поймём, почему $\tilde{A}$ называется связностью. *Аффинную* связность представляют символы Кристоффеля, которые мы добавляем к обычной частной производной, чтоб получить «правильную» производную — производную, задающую параллельный перенос (ср. (6.43) с (6.10)). Чтобы эта «правильность» производной сохранялась, символы Кристоффеля должны преобразовываться при замене координат специальным образом (упр. 6.2), и формулы перехода очень похожи на то, как меняется $\tilde{A}$ при калибровочном преобразовании (6.42). Различаются эти связности тем, что́ они призваны сохранять: аффинная связность сохраняет параллельность, наша один-форма связности сохраняет градиент при калибровочных преобразованиях.

Теперь мы можем записать уравнение Клейна — Гордона в калибровочно-ковариантном виде:

$$D_\mu D^\mu \psi - m^2\psi = (\nabla_\mu - iA_\mu)(\nabla^\mu - iA^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \tag{6.44}$$

Если фаза ψ «правильна», то она превращается в обычное уравнение Клейна — Гордона, и любая ψ, полученная из «правильной» калибровочным преобразованием, тоже будет решением (6.44).

Задав какую-либо систему координат, мы можем определить тензор кривизны формулой, похожей на (6.18):

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta.$$

Её аналогом для нашего случая будет

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = F_{\mu\nu}\psi. \tag{6.45}$$

Прямое вычисление показывает, что *калибровочная два-форма кривизны* $\tilde{F}$, имеющая компоненты $F_{\mu\nu}$, — это просто

$$\tilde{F} = -i\tilde{d}\tilde{A}. \tag{6.46}$$

Очевидно, $\tilde{F}$ *калибровочно-инвариантна* (см. (ii) выше). (Тензор Римана был координатно-инвариантным.) Уравнение

Клейна — Гордона *калибровочно-плоско* ($\tilde{F} = 0$), поскольку существует калибровка с $\tilde{A} = 0$. Но поскольку есть явная аналогия с электромагнетизмом ($\tilde{A}$ = один-форма потенциала, $\mathrm{i}\tilde{F}$ = тензор Фарадея, см. гл. 5), естественно попытаться посмотреть на (6.44) как на обобщение уравнения Клейна — Гордона на случай заряженной частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем $\tilde{F}$. Такая гипотеза и в самом деле верна, и (6.44) можно прямо вывести из того факта, что канонический импульс классической частицы во внешнем электромагнитном поле равен $\tilde{p}_c = \tilde{p} + (q/c)\tilde{A}$, где $\tilde{p}$ — «настоящий» 4-импульс частицы. В силу принципа соответствия уравнение $\tilde{p}\cdot\tilde{p} + m^2 = 0$ переходит (в системе единиц с $\hbar = c = 1$) в уравнение

$$(-\mathrm{i}\nabla_\mu - qA_\mu)(-\mathrm{i}\nabla^\mu - qA^\mu) + m^2\psi = 0;$$

отсюда мы видим, что (6.44) действительно есть волновое уравнение для такой частицы с зарядом $q = 1$. Всё вышесказанное можно подытожить следующим образом: скалярная частица с массой m и зарядом q, находящаяся во внешнем электромагнитном поле с один-формой потенциала $\tilde{A}$, подчиняется уравнению

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)(\nabla^\mu - \mathrm{i}qA^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \tag{6.47}$$

Калибровочные преобразования состоят в следующем:

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}\varphi, \tag{6.48a}$$

$$\psi \to \psi e^{\mathrm{i}\varphi/q}. \tag{6.48b}$$

Один-форму $\tilde{A}$ можно рассматривать как связность на $U(1)$-расслоении, а $\tilde{F}$ — как её кривизну.

Упражнение 6.25. (a) Проверьте, что $\tilde{D}\psi \to e^{\mathrm{i}\varphi(x)}\tilde{D}\psi$ при калибровочном преобразовании.

(b) Проверьте (6.46).

6.15. БИБЛИОГРАФИЯ

Весьма полное руководство по римановой геометрии — двухтомная монография Ш. Кобаяси и К. Номидзу «Основы дифференциальной геометрии» (М.: Наука, 1981).

Хорошее современное введение в псевдориманову геометрию (метрическая связность для случая индефинитной метрики) можно найти в книгах: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация (М.: Мир, 1977); The Large-Scale Structure of Space-Time, S. W. Hawking & G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, 1973); Вейнберг С. Гравитация и космология (М.: Мир, 1975).

Более полное описание роли связностей в калибровочных теориях имеется в статье A. Trautman, Infinitesimal connections in physics, *in*: Proceedings of the International Symposium on New Mathematical Methods in Physics, ed. K. Bleuler & A. Reetz (Bonn, 1973). См. также R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, в 2-х томах (Benjamin, Reading,