Клейна — Гордона *калибровочно-плоско* ($\tilde{F} = 0$), поскольку существует калибровка с $\tilde{A} = 0$. Но поскольку есть явная аналогия с электромагнетизмом ($\tilde{A}$ = один-форма потенциала, $\mathrm{i}\tilde{F}$ = тензор Фарадея, см. гл. 5), естественно попытаться посмотреть на (6.44) как на обобщение уравнения Клейна — Гордона на случай заряженной частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем $\tilde{F}$. Такая гипотеза и в самом деле верна, и (6.44) можно прямо вывести из того факта, что канонический импульс классической частицы во внешнем электромагнитном поле равен $\bar{p}_c = \bar{p} + (q/c)\tilde{A}$, где $\bar{p}$ — «настоящий» 4-импульс частицы. В силу принципа соответствия уравнение $\bar{p}\cdot\bar{p} + m^2 = 0$ переходит (в системе единиц с $\hbar = c = 1$) в уравнение

$$(-\mathrm{i}\nabla_\mu - qA_\mu)(-\mathrm{i}\nabla^\mu - qA^\mu) + m^2\psi = 0;$$

отсюда мы видим, что (6.44) действительно есть волновое уравнение для такой частицы с зарядом $q = 1$. Всё вышесказанное можно подытожить следующим образом: скалярная частица с массой m и зарядом q, находящаяся во внешнем электромагнитном поле с один-формой потенциала $\tilde{A}$, подчиняется уравнению

$$(\nabla_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)(\nabla^\mu - \mathrm{i}qA^\mu)\psi - m^2\psi = 0. \tag{6.47}$$

Калибровочные преобразования состоят в следующем:

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \tilde{d}\varphi, \tag{6.48a}$$

$$\psi \to \psi e^{\mathrm{i}\varphi/q}. \tag{6.48b}$$

Один-форму $\tilde{A}$ можно рассматривать как связность на $U(1)$-расслоении, а $\tilde{F}$ — как её кривизну.

Упражнение 6.25. (a) Проверьте, что $\tilde{D}\psi \to e^{\mathrm{i}\varphi(x)}\tilde{D}\psi$ при калибровочном преобразовании.

(b) Проверьте (6.46).

6.15. БИБЛИОГРАФИЯ

Весьма полное руководство по римановой геометрии — двухтомная монография Ш. Кобаяси и К. Номидзу «Основы дифференциальной геометрии» (М.: Наука, 1981).

Хорошее современное введение в псевдориманову геометрию (метрическая связность для случая индефинитной метрики) можно найти в книгах: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация (М.: Мир, 1977); The Large-Scale Structure of Space-Time, S. W. Hawking & G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, 1973); Вейнберг С. Гравитация и космология (М.: Мир, 1975).

Более полное описание роли связностей в калибровочных теориях имеется в статье A. Trautman, Infinitesimal connections in physics, *in*: Proceedings of the International Symposium on New Mathematical Methods in Physics, ed. K. Bleuler & A. Reetz (Bonn, 1973). См. также R. Hermann, Vector Bundles in Mathematical Physics, в 2-х томах (Benjamin, Reading, Mass., 1970). По поводу «физического» описания калибровочных теорий см. J. C. Taylor, Gauge Theories of the Weak Interactions (Cambridge University Press, 1976). Математическое обсуждение связностей, понимаемых в более широком смысле, можно найти в книге Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette & M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds, and Physics (North-Holland, Amsterdam, 1977). Связности на расслоенных пространствах рассматриваются в статье B. Carter, Underlying mathematical structures of classical gravitation theory, *in*: Recent Developments in Gravitation, ed. M. Levy & S. Deser (Plenum, New York, 1979).

Введение аффинной связности на многообразии вызывает к жизни множество других тем для исследования. Например, на группах Ли имеется естественная аффинная связность, превращающая однопараметрические подгруппы в геодезические группового многообразия. Эта конструкция изучается шаг за шагом в виде последовательности упражнений в указанной выше книге Мизнера и др.

То что кручение может играть роль в гравитации, впервые было замечено Картаном. Однако значительное внимание теория гравитации Эйнштейна — Картана привлекла лишь позднее; см. A. Trautman, Bull. de l'Academie Polonaises des Sciences (math., astr., phys.) 20, 185—190 (1972).

Тензор Римана не так просто вычислить по заданным компонентам метрического тензора. Задача упрощается, если использовать метод подвижных реперов Картана, использующий исчисление дифференциальных форм; см. снова книгу Мизнера и др.

Хотя мы вовсе не рассматривали дифференциальную геометрию на комплексных многообразиях, она интересна и может в будущем сыграть существенную роль в физических приложениях. Введение в неё, рассчитанное на физиков, дано в книге E. J. Flahery, Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity (Springer, Berlin, 1976); стандартное чисто математическое руководство — S. S. Chern, Complex Manifolds Without Potential Theory (D. Van Nostrand, New York, 1967).