6. СВЯЗНОСТИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Предмет этой главы лежит несколько в стороне от основной темы книги — изучения дифференциальных структур на многообразиях. Аффинная связность — это дополнительная структура, придающая многообразию кривизну и форму; она не возникает естественно из дифференциальной структуры, она даже не является тензором. Поэтому настоящая глава играет роль дополнения. Однако без этой важной и злободневной темы никакое изучение дифференциальной геометрии не будет полным для физика. Особенно в физике элементарных частиц, в калибровочных теориях, связности приобретают всё большую популярность. В основном мы будем обсуждать *аффинные* связности (на римановых многообразиях) и лишь под занавес отведём небольшой параграф вводного характера калибровочным связностям.

В предыдущих главах нам уже приходилось вводить дополнительные структуры на многообразиях; мы делали это, выделяя некоторое тензорное поле среди других, с тем чтобы оно служило нам в качестве метрики или элемента объёма. Задание элемента объёма совсем недалеко выводит за рамки дифференциальной структуры многообразия. Метрика же, как мы увидим в дальнейшем, порождает много дополнительных структур и помимо аффинной связности. Правда, в описанных ранее приложениях можно было просто не обращать внимания на всё это и использовать метрику лишь в её роли отображения тензоров типа $\binom{N}{M}$ и тензоры типа $\binom{N-1}{M+1}$. Аффинная связность не укладывается в рамки уже построенных структур. С точки зрения дифференциальной геометрии это совершенно новая структура на многообразии, дающая богатые новые возможности для физических приложений.

6.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Как мы уже неоднократно подчёркивали, на дифференцируемых многообразиях нет само собой разумеющегося понятия параллельности векторов в разных точках. Аффинная связность — это *правило*, посредством которого вводится понятие параллельности. Чтобы представить, какого сорта правила вообще возможны, рассмотрим понятие параллельности на обычной двумерной поверхности, скажем на сфере. На рис. 6.1 вектор $\bar{V}$ — это касательный вектор к большому кругу ABC в северном полюсе, обозначенном A. Представим, что мы «переносим» $\bar{V}$ вдоль ABC к южному полюсу C. Для того чтоб вектор продолжал «лежать на сфере», он должен всё время оставаться в касательной плоскости к сфере, и, если по дороге мы не будем его поворачивать, он будет просто оставаться касательным к кривой ABC. В точку C он

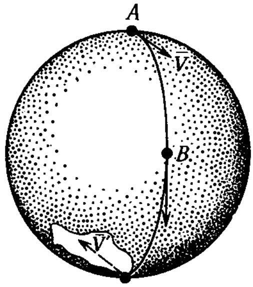

Рис. 6.1. Параллельный перенос вектора $\bar{V}$ по большому кругу на сфере.

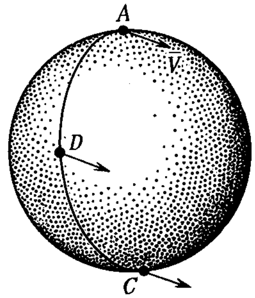

Рис. 6.2. Другой путь параллельного переноса, приводящий к другому результату.

придёт вектором $\bar{V}'$, направленным с точки зрения нашего трёхмерного мира точно противоположно вектору $\bar{V}$. Должны ли мы считать, что хотя бы с точки зрения геометрии сферы векторы $\bar{V}$ и $\bar{V}'$ параллельны? Прежде чем сделать окончательный вывод, представим, что мы переносим $\bar{V}$ из точки A в точку C по пути ADC, изображенному на рис. 6.2, где ADC — другой большой круг, пересекающий ABC в обоих полюсах под прямым углом. Поскольку в начале пути $\bar{V}$ перпендикулярен ADC, то естественно считать, что мы движем его, не поворачивая, если он всё время будет оставаться перпендикулярным к ADC и касательным к сфере. Таким образом в точке C мы получим вектор $\bar{V}''$, который для нас, трёхмерных, и в самом деле параллелен вектору $\bar{V}$. Но векторы $\bar{V}''$ и $\bar{V}'$ в точке C направлены прямо противоположно! Который из них параллелен $\bar{V}$? Ясно, что если мы будем рассматривать свойства сферы как таковой, ни один вектор не заслуживает быть названным параллельным $\bar{V}$. Понятия параллельности как таковой просто *нет*. Всё, что можно сделать, и как раз это мы и делали, — это определить понятие параллельного *переноса*, понятие движения вектора вдоль кривой без изменения его направления. *Аффинная связность есть правило параллельного переноса.*