6.3. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Будем пока смотреть на аффинную связность как на чисто абстрактное понятие; более конкретный облик она приобретёт в следующем пункте, когда мы перейдём к компонентам. Итак, предположим, что мы имеем кривую $\mathscr{C}$ и связность, т. е. правило параллельного переноса. Обозначим через $\bar{U} = d/d\lambda$ касательный вектор к $\mathscr{C}$. Зафиксируем в точке P произвольный вектор $\bar{V}$ из T_P. Тогда связность позволяет нам задать

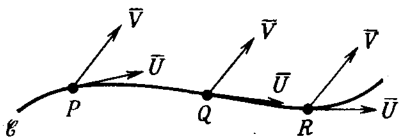

Рис. 6.3. Аффинная связность позволяет *определить* $\bar{V}(Q)$ в любой точке Q кривой $\mathscr{C}$ как результат параллельного переноса вектора $\bar{V}$ из точки P.

векторное поле $\bar{V}$ вдоль кривой $\mathscr{C}$, полученное параллельным переносом $\bar{V}$ (см. рис. 6.3). Поскольку мы можем теперь сказать, что $\bar{V}$ не меняется вдоль $\mathscr{C}$, мы можем определить производную, в смысле которой изменение $\bar{V}$ равно нулю. Она

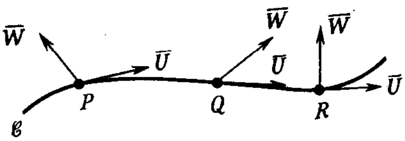

Рис. 6.4. Векторное поле $\bar{W}$ на $\mathscr{C}$ не есть результат параллельного переноса. Сравнение с векторным полем, которое таковым является, позволяет определить ковариантную производную поля $\bar{W}$.

называется *ковариантной производной по направлению* $\bar{U}$ и обозначается через $\nabla_{\bar{U}}$; итак,

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{U}}\bar{V} = 0 \Leftrightarrow \bar{V} \text{ есть результат параллельного переноса вдоль } \mathscr{C}. \qquad (6.1)$$

Если $\bar{W}$ — произвольное векторное поле, заданное всюду на $\mathscr{C}$, то мы можем определить его ковариантную производную вдоль $\mathscr{C}$ почти так же, как мы определяли производную Ли (см. рис. 6.4). Чтобы определить $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ в точке P, удобно все векторы представить как функции от λ. Пусть точке P отвечает значение λ_0. Определим поле $\overline{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda)$ как результат параллельного переноса $(\nabla_{\bar{U}}\overline{W}^* = 0)$ вектора $\bar{W}$ из точки $\lambda_0 + \varepsilon$, так что вектор $\overline{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0)$ получается параллельным переносом вектора $\bar{W}(\lambda_0 + \varepsilon)$ назад в точку λ_0. Теперь, когда сравниваемые векторы лежат в одном пространстве T_P, мы можем записать определение производной:

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0) - \bar{W}(\lambda_0)}{\varepsilon}. \qquad (6.2)$$

Хотя эта процедура напоминает ту, которую мы использовали при определении производной Ли, важно уяснить имеющуюся принципиальную разницу между ними: чтобы перенести назад вектор при вычислении производной Ли, нужна полная конгруэнция, т. е. $\bar{U}$ и $\bar{W}$ должны быть определены в целой окрестности кривой $\mathscr{C}$; для параллельного переноса нам нужны лишь кривая $\mathscr{C}$, векторные поля $\bar{U}$ и $\bar{W}$ на этой кривой и, конечно, связность на этой кривой.

Как легко вывести из (6.2), $\nabla_{\bar{U}}$ — дифференциальный оператор:

$$\nabla_{\bar{U}}(f\bar{W}) = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + \bar{W}\nabla_{\bar{U}}f = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + \bar{W}\frac{df}{d\lambda} \qquad (6.3a)$$

(определение ковариантной производной для скаляров очевидно). Правило Лейбница позволяет распространить определение ковариантной производной на тензоры произвольного типа:

◆ $$\nabla_{\bar{U}}(\bar{A}\otimes\bar{B}) = (\nabla_{\bar{U}}\bar{A})\otimes\bar{B} + \bar{A}\otimes(\nabla_{\bar{U}}\bar{B}), \qquad (6.3b)$$

◆ $$\nabla_{\bar{U}}\langle\tilde{\omega}, \bar{A}\rangle = \langle\nabla_{\bar{U}}\tilde{\omega}, A\rangle + \langle\tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}}\bar{A}\rangle. \qquad (6.3c)$$

Равенства (6.3) гарантируют согласованность связности с дифференциальной структурой.

Представим, что мы ввели новый параметр на кривой, перейдя от параметра λ к параметру μ. Тогда новым касательным вектором будет $g\bar{U}$, где $g = d\lambda/d\mu$. Из (6.2) видно, что ковариантная производная тоже умножится на g, поскольку ε заменится на $\delta\mu = \varepsilon d\mu/d\lambda$, а $\bar{W}^*_{\mu_0+\delta\mu}(\mu_0)$ совпадает с $\bar{W}^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0)$. (Это, строго говоря, входит в определение связности: понятие параллельного переноса вдоль кривой не должно зависеть от выбора параметризации.) Отсюда можно заключить, что для любой функции g

$$\nabla_{g\bar{U}}\bar{W} = g\nabla_{\bar{U}}\bar{W}. \qquad (6.4a)$$

Ещё одно условие, которому должна удовлетворять аффинная связность, — это свойство аддитивности ковариантных производных по разным направлениям:

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})_P + (\nabla_{\bar{V}}\bar{W})_P = (\nabla_{\bar{U}+\bar{V}}\bar{W})_P. \qquad (6.4b)$$

Оно делает ковариантную ∇ похожей на обычную ∇ эвклидова векторного исчисления. Соотношения (6.4a, b) в совокупности показывают, что для любых векторных полей $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ и функций f, g

◆ $$\nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{W}=f\nabla_{\bar{U}}\bar{W}+g\nabla_{\bar{V}}\bar{W}. \tag{6.4c}$$

Упражнение 6.1. Покажите, что из (6.4c) и того, что $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ есть вектор, следует, что $\nabla\bar{W}$ есть тензор типа $\binom{1}{1}$, значение которого на аргументах $\bar{U}$ и $\tilde{\omega}$ равно

$$\nabla\bar{W}(\tilde{\omega};\ \bar{U})=\langle\tilde{\omega},\ \nabla_{\bar{U}}\bar{W}\rangle. \tag{6.5}$$

Этот тензор называется *градиентом* поля $\bar{W}$.

Тот факт, что $\nabla\bar{W}$ есть тензорное поле, означает, что мы можем совсем убрать кривую из определения ковариантной производной. Тензор $\nabla\bar{W}$ определяется только связностью и самим полем $\bar{W}$. Есть искушение пойти дальше и сказать, что ∇ сама по себе есть тензорное поле типа $\binom{0}{1}$, представляющее связность, но это будет ошибкой. Хотя и можно считать, что ∇ представляет связность, тензорным полем она не является, так как $\nabla(f\bar{W})\neq f\nabla\bar{W}$ (см. (6.3a)). Вот что не позволяет смотреть на связность как на тензорное поле.

6.4. КОМПОНЕНТЫ: КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ БАЗИСА

Поскольку каждый тензор можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров, а эти последние в свою очередь можно получить из векторного базиса $\{\bar{e}_i\}$, то связность полностью описывается градиентами базисных векторов. Итак, положим

◆ $$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j=\Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.6}$$

Функции $\Gamma^k{}_{ji}$ называются *символами Кристоффеля.* При фиксированных (i, j) $\Gamma^k{}_{ji}$ есть k-я компонента векторного поля $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j$. Обратите внимание на порядок индексов у Γ: связанный с производной индекс идёт последним. Часто мы будем пользоваться сокращением

$$\nabla_{\bar{e}_i}\equiv\nabla_i. \tag{6.7}$$

На n-мерном многообразии n^3 функций $\Gamma^k{}_{ji}$ полностью определяют аффинную связность, и часто это самый удобный способ её описания. Отметим, что $\Gamma^k{}_{ji}$ тензора не образуют: при