Оно делает ковариантную ∇ похожей на обычную ∇ эвклидова векторного исчисления. Соотношения (6.4a, b) в совокупности показывают, что для любых векторных полей $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ и функций f, g

$$\blacklozenge \quad \nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{W} = f\nabla_{\bar{U}}\bar{W} + g\nabla_{\bar{V}}\bar{W}. \tag{6.4c}$$

Упражнение 6.1. Покажите, что из (6.4c) и того, что $\nabla_{\bar{U}}\bar{W}$ есть вектор, следует, что $\nabla\bar{W}$ есть тензор типа $\binom{1}{1}$, значение которого на аргументах $\bar{U}$ и $\tilde{\omega}$ равно

$$\nabla\bar{W}(\tilde{\omega};\ \bar{U}) = \langle\tilde{\omega},\ \nabla_{\bar{U}}\bar{W}\rangle. \tag{6.5}$$

Этот тензор называется *градиентом* поля $\bar{W}$.

Тот факт, что $\nabla\bar{W}$ есть тензорное поле, означает, что мы можем совсем убрать кривую из определения ковариантной производной. Тензор $\nabla\bar{W}$ определяется только связностью и самим полем $\bar{W}$. Есть искушение пойти дальше и сказать, что ∇ сама по себе есть тензорное поле типа $\binom{0}{1}$, представляющее связность, но это будет ошибкой. Хотя и можно считать, что ∇ представляет связность, тензорным полем она не является, так как $\nabla(f\bar{W}) \neq f\nabla\bar{W}$ (см. (6.3a)). Вот что не позволяет смотреть на связность как на тензорное поле.

6.4. КОМПОНЕНТЫ: КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ БАЗИСА

Поскольку каждый тензор можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров, а эти последние в свою очередь можно получить из векторного базиса $\{\bar{e}_i\}$, то связность полностью описывается градиентами базисных векторов. Итак, положим

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j = \Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.6}$$

Функции $\Gamma^k{}_{ji}$ называются *символами Кристоффеля.* При фиксированных (i, j) $\Gamma^k{}_{ji}$ есть k-я компонента векторного поля $\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j$. Обратите внимание на порядок индексов у Γ: связанный с производной индекс идёт последним. Часто мы будем пользоваться сокращением

$$\nabla_{\bar{e}_i} \equiv \nabla_i. \tag{6.7}$$

На n-мерном многообразии n^3 функций $\Gamma^k{}_{ji}$ полностью определяют аффинную связность, и часто это самый удобный способ её описания. Отметим, что $\Gamma^k{}_{ji}$ тензора не образуют: при преобразованиях базиса индексы k и i ведут себя как тензорные (в силу (6.5)), а j нет (в силу (6.3а)).

Упражнение 6.2. Покажите, что

$$\Gamma^{k'}{}_{j'i'} = \Lambda^{k'}{}_{k}\Lambda^{i}{}_{i'}\Lambda^{j}{}_{j'}\Gamma^{k}{}_{ji} + \Lambda^{k'}{}_{k}\Lambda^{i}{}_{i'}(\nabla_i\Lambda^{k}{}_{j'}),$$

где под $\nabla_i\Lambda^k{}_{j'}$ подразумеваются $\mathrm{d}\Lambda^k{}_{j'}/\mathrm{d}\lambda_i$, а $\bar{e}_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_i$ и $\Lambda^k{}_{j'}$ рассматриваются как функции на интегральных кривых полей $\bar{e}_i$.

Упражнение 6.3. Покажите с помощью упр. 6.1, что

$$\{\Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k \otimes \tilde{\omega}^i\}$$

есть набор n тензоров типа $\binom{1}{1}$. (Здесь $\{\tilde{\omega}^i\}$ — базисные один-формы, дуальные к $\{\bar{e}_i\}$.)

Упражнение 6.4. На единичной сфере обычные сферические координаты θ и φ задают базис $\{\bar{e}_\theta = \partial/\partial\theta,\ \bar{e}_\varphi = \partial/\partial\varphi\}$. Развивая соображения, высказанные в § 6.2, докажите, что

$$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta,$$

а остальные Γ равны нулю. (NB Это непростая задача. Вы должны максимально использовать симметрию сферы и догадаться (это совсем не тривиально!), как ведут себя векторы при параллельном переносе.)

Упражнение 6.5. Выведите из (6.6) и (6.3с), что

◆ $$\nabla_i\tilde{\omega}^j = -\Gamma^j{}_{ki}\tilde{\omega}^k. \tag{6.8}$$

Теперь, когда у нас есть производные базисных векторов, мы можем найти производные любых тензоров. Например, если $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, то

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} = U^i\nabla_{\bar{e}_i}(V^j\bar{e}_j) = U^i\left(\nabla_{\bar{e}_i}V^j\right)\bar{e}_j + U^iV^j\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j.$$

В первом члене V^j — просто функция и $U^i\nabla_i(V^j) = \mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\lambda$. Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{U}}\bar{V} &= \frac{\mathrm{d}V^j}{\mathrm{d}\lambda}\bar{e}_j + U^iV^j\Gamma^k{}_{ji}\bar{e}_k \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}V^j}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^j{}_{ki}V^kU^i\right)\bar{e}_j.\end{aligned}$$

Чтоб получить окончательное выражение, нам пришлось переобозначить индексы суммирования в последнем члене. Поскольку $\nabla\bar{V}$ — тензор, можно найти его компоненты:

$$(\nabla\bar{V})^j{}_i = \nabla_i(V^j) + \Gamma^j{}_{ki}V^k.$$

Несколько слов относительно члена $\nabla_i(V^j)$. Если $\bar{e}_i$ есть вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, то $\nabla_i(V^j) = \mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\mu$, где V^j — просто функции, заданные на кривой с параметром μ. Если $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, то $\bar{e}_i = \partial/\partial x^i$, и мы получаем

$$\nabla_i V^j = \frac{\partial}{\partial x^i} V^j = V^j{}_{,i};$$

здесь использовано «правило запятой», введённое для дифференциальных форм. Обычно правило запятой используется и тогда, когда $\bar{e}_i$ не являются координатными базисными векторами:

$$\nabla_{\bar{e}_i} f = \bar{e}_i[f] \equiv f_{,i} \qquad (6.9)$$

для любой функции f. В случае когда $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, ∇_i совпадает с обычной частной производной, когда нет, это просто производная по направлению $\bar{e}_i$. Итак, мы можем записать

◆ $$(\nabla\bar{V})^j{}_i = V^j{}_{,i} + \Gamma^j{}_{ki}V^k \equiv V^j{}_{;i}; \qquad (6.10)$$

мы ввели обозначение «точка с запятой» для ковариантной производной. Хотя ни $V^j{}_{,i}$, ни $\Gamma^j{}_{ki}V^k$ не преобразуются как тензоры, их сумма есть тензор.

Упражнение 6.6. Покажите, что если $\tilde{\omega}$ — один-форма, то

$$(\nabla\tilde{\omega})_{ij} \equiv \omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma^k{}_{ij}\omega_k. \qquad (6.11)$$

Упражнение 6.7. Покажите, что если $\mathbf{T}$ — тензор типа $\binom{N}{M}$, то

$$T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l;m} = T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l,m} + \Gamma^i{}_{nm}T^{n\ldots j}{}_{k\ldots l} + \ldots$$
$$+ \Gamma^j{}_{nm}T^{i\ldots n}{}_{k\ldots l} - \Gamma^n{}_{km}T^{i\ldots j}{}_{n\ldots l} - \ldots - \Gamma^n{}_{lm}T^{i\ldots j}{}_{k\ldots n}. \qquad (6.12)$$

6.5. КРУЧЕНИЕ

Величины $[\bar{U}, \bar{V}]$ и $\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ обе представляют собой векторные поля и обе антисимметричны по $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Связность называется *симметричной*, если они равны:

◆ $$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}] \iff \text{связность симметрична.} \qquad (6.13)$$

Название «симметричная» объясняется свойством, доказываемым в следующем упражнении.