Несколько слов относительно члена $\nabla_i(V^j)$. Если $\bar{e}_i$ есть вектор $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$, то $\nabla_i(V^j) = \mathrm{d}V^j/\mathrm{d}\mu$, где V^j — просто функции, заданные на кривой с параметром μ. Если $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, то $\bar{e}_i = \partial/\partial x^i$, и мы получаем

$$\nabla_i V^j = \frac{\partial}{\partial x^i} V^j = V^j{}_{,i};$$

здесь использовано «правило запятой», введённое для дифференциальных форм. Обычно правило запятой используется и тогда, когда $\bar{e}_i$ не являются координатными базисными векторами:

$$\nabla_{\bar{e}_i} f = \bar{e}_i [f] \equiv f_{,i} \tag{6.9}$$

для любой функции f. В случае когда $\bar{e}_i$ — координатные базисные векторы, ∇_i совпадает с обычной частной производной, когда нет, это просто производная по направлению $\bar{e}_i$. Итак, мы можем записать

◆ $$(\nabla \bar{V})^j{}_i = V^j{}_{,i} + \Gamma^j{}_{ki} V^k \equiv V^j{}_{;i}; \tag{6.10}$$

мы ввели обозначение «точка с запятой» для ковариантной производной. Хотя ни $V^j{}_{,i}$, ни $\Gamma^j{}_{ki}V^k$ не преобразуются как тензоры, их сумма есть тензор.

Упражнение 6.6. Покажите, что если $\tilde{\omega}$ — один-форма, то

$$(\nabla \tilde{\omega})_{ij} \equiv \omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma^k{}_{ij}\omega_k. \tag{6.11}$$

Упражнение 6.7. Покажите, что если $\mathbf{T}$ — тензор типа $\binom{N}{M}$, то

$$T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l;m} = T^{i\ldots j}{}_{k\ldots l,m} + \Gamma^i{}_{nm} T^{n\ldots j}{}_{k\ldots l} + \ldots$$
$$+ \Gamma^j{}_{nm} T^{i\ldots n}{}_{k\ldots l} - \Gamma^n{}_{km} T^{i\ldots j}{}_{n\ldots l} - \ldots - \Gamma^n{}_{lm} T^{i\ldots j}{}_{k\ldots n}. \tag{6.12}$$

6.5. КРУЧЕНИЕ

Величины $[\bar{U}, \bar{V}]$ и $\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ обе представляют собой векторные поля и обе антисимметричны по $\bar{U}$ и $\bar{V}$. Связность называется *симметричной*, если они равны:

◆ $$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}] \Longleftrightarrow \text{связность симметрична.} \tag{6.13}$$

Название «симметричная» объясняется свойством, доказываемым в следующем упражнении.

Упражнение 6.8. Покажите, что в *координатном* базисе из (6.13) следует, что связность симметрична тогда и только тогда, когда

$$\blacklozenge \quad \Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}. \tag{6.14}$$

Для несимметричной связности определим *кручение* $T^k{}_{ji}$ формулой

$$\nabla_{\bar{e}_i}\bar{e}_j - \nabla_{\bar{e}_j}\bar{e}_i - [\bar{e}_i, \bar{e}_j] \equiv T^k{}_{ji}\bar{e}_k. \tag{6.15}$$

Упражнение 6.9. Покажите, что $\{T^k{}_{ji}\}$ образуют *тензор* типа $\binom{1}{2}$; мы будем называть его *тензором кручения* и обозначать через $\mathbf{T}$:

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}] = \mathbf{T}(\ ;\bar{U}, \bar{V}).$$

Пустое место в скобках оставлено для аргумента — одинформы.

Упражнение 6.10. Пусть на многообразии заданы две связности с символами Кристоффеля $\Gamma^k{}_{ij}$ и $\Gamma'^k{}_{ij}$ соответственно. Покажите, что

$$D^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma'^k{}_{ij}$$

являются компонентами тензора типа $\binom{1}{2}$. Покажите, что этот тензор $\mathbf{D}$ симметричен по своим векторным аргументам тогда и только тогда, когда тензоры кручения обеих связностей совпадают.

Упражнения 6.9 и 6.10 показывают, что мы всегда можем определить *симметричную часть* $\nabla_{(S)}$ любой связности ∇, задав её символы Кристоффеля формулой

$$\Gamma^k{}_{(S)\,ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \frac{1}{2}T^k{}_{ij}.$$

Хотя кручение в принципе тоже полезная часть связности, но в конструировании математических моделей физических законов оно не так популярно, как симметричная часть. Начиная с этого места мы будем иметь дело только с симметричными связностями, за исключением тех случаев, когда явно оговорено противное. Одна из причин для такого решения станет ясна из упр. 6.18. Заметим, что из определения (6.13) непосредственно вытекает следующее свойство.

Упражнение 6.11. Пусть на многообразии задана симметричная связность. Покажите, что в любом выражении для компонент производной Ли любого тензора все запятые можно заменить на точки с запятой. Например,

$$(\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i = \omega_{i,\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{,\,i} = \omega_{i;\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{;\,i}.$$

(Естественно, при этом надо заменять *все* запятые, а не только некоторые.)

6.6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Геодезическая — это такая кривая, собственный касательный вектор которой переносится вдоль неё параллельно. Уравнение геодезической:

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0. \tag{6.16a}$$

Если λ — параметр кривой и задана система координат $\{x^i\}$, то оно принимает вид

$$\frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{jk}U^jU^k = 0, \tag{6.16b}$$

или

$$\blacklozenge \quad \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \tag{6.16c}$$

Последнее уравнение — это квазилинейная система дифференциальных уравнений относительно функций $x^i(\lambda)$, задающих геодезическую кривую.

Упражнение 6.12. Напомним, что наше определение кривой включает в себя задание параметра. Покажите, что если (6.16c) верно для параметра λ, то при замене его на

$$\mu = a\lambda + b, \tag{6.17}$$

где a и b — постоянные, мы тоже получим решение (6.16c). По этой причине параметр геодезической кривой называется *аффинным параметром*.

Заметим, что в уравнение геодезической входит лишь симметричная часть связности. Это позволяет представить эффект кручения геометрически. Возьмём геодезическую с касательным вектором $\bar{U}$, проходящую через точку P. В T_P выберем какое-нибудь $(n-1)$-мерное подпространство R_P (размерность многообразия n), состоящее из линейно-независимых от $\bar{U}$ векторов. Зафиксируем вектор $\bar{\xi}$ из R_P и проведём через P геодезическую, касательную к $\bar{\xi}$. Используя симметричную часть связности, перенесём $\bar{U}$ параллельно вдоль $\bar{\xi}$ на малое расстояние (в смысле аффинного параметра) ε. Через эту новую точку проведём новую геодезическую, каса-