тые можно заменить на точки с запятой. Например,

$$(\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i = \omega_{i,\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{,\,i} = \omega_{i;\,j}U^j + \omega_j U^j{}_{;\,i}.$$

(Естественно, при этом надо заменять *все* запятые, а не только некоторые.)

6.6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Геодезическая — это такая кривая, собственный касательный вектор которой переносится вдоль неё параллельно. Уравнение геодезической:

$$\blacklozenge \quad \nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0. \tag{6.16a}$$

Если λ — параметр кривой и задана система координат $\{x^i\}$, то оно принимает вид

$$\frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{jk}U^jU^k = 0, \tag{6.16b}$$

или

$$\blacklozenge \quad \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \tag{6.16c}$$

Последнее уравнение — это квазилинейная система дифференциальных уравнений относительно функций $x^i(\lambda)$, задающих геодезическую кривую.

Упражнение 6.12. Напомним, что наше определение кривой включает в себя задание параметра. Покажите, что если (6.16c) верно для параметра λ, то при замене его на

$$\mu = a\lambda + b, \tag{6.17}$$

где a и b — постоянные, мы тоже получим решение (6.16c). По этой причине параметр геодезической кривой называется *аффинным параметром.*

Заметим, что в уравнение геодезической входит лишь симметричная часть связности. Это позволяет представить эффект кручения геометрически. Возьмём геодезическую с касательным вектором $\bar{U}$, проходящую через точку P. В T_P выберем какое-нибудь $(n-1)$-мерное подпространство R_P (размерность многообразия n), состоящее из линейно-независимых от $\bar{U}$ векторов. Зафиксируем вектор $\bar{\xi}$ из R_P и проведём через P геодезическую, касательную к $\bar{\xi}$. Используя симметричную часть связности, перенесём $\bar{U}$ параллельно вдоль $\bar{\xi}$ на малое расстояние (в смысле аффинного параметра) ε. Через эту новую точку проведём новую геодезическую, касательную к $\bar{U}$ в этой точке (т. е. к $\bar{U}'$ на рис. 6.5). Эта геодезическая будет почти что параллельна исходной. Таким способом мы можем провести геодезические, «параллельные» $\bar{U}$, через каждую точку из окрестности P. Мы можем переносить «связующий» вектор $\bar{\xi}$ вдоль этой конгруэнции геодезических двумя разными способами: либо с помощью параллельного

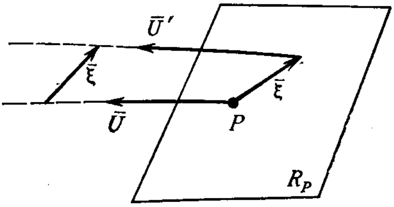

Рис. 6.5. Две параллельные геодезические $\bar{U}$ и $\bar{U}'$ и вектор $\bar{\xi}$, который соединяет их в плоскости R_P и параллельно переносится вдоль $\bar{U}$. Когда есть кручение, он "откручивается" от $\bar{U}'$.

переноса, либо с помощью переноса Ли. Пусть $\bar{\xi}$ перенесён параллельно. Тогда мы получаем из (6.15)

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i - T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Однако для исходного вектора $\bar{\xi}$ мы имеем $\nabla_{(S)\,\bar{\xi}}\bar{U} = 0$, иначе говоря, $(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}U^j\xi^k$. Таким образом, в исходной точке

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -\frac{1}{2}T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Это означает, что при параллельном переносе вдоль построенной нами конгруэнции геодезических векторов $\bar{\xi}$ будет оставаться «прикреплённым» к кривым конгруэнции, если связность *симметрична*. Но если связность не симметрична, он не будет оставаться «прикреплённым». Грубо говоря, под действием кручения вектор $\bar{\xi}$ «вращается» относительно ближайших геодезических. И наоборот: если мы рассматриваем параллельно переносимый вектор $\bar{\xi}$ как определяющий некое «постоянное» направление, то конгруэнция «параллельных» геодезических будет при движении $\bar{\xi}$ «закручиваться» вокруг геодезической «несущей» $\bar{\xi}$. (Нельзя, однако, придать точный смысл словам «вращается» и «закручивается», если нет метрики.)

6.7. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В дальнейшем будет удобно использовать систему координат, основанную на геодезических. Чтоб построить её, заметим, что геодезические, проходящие через точку P, задают