тельную к $\bar{U}$ в этой точке (т. е. к $\bar{U}'$ на рис. 6.5). Эта геодезическая будет почти что параллельна исходной. Таким способом мы можем провести геодезические, «параллельные» $\bar{U}$, через каждую точку из окрестности P. Мы можем переносить «связующий» вектор $\bar{\xi}$ вдоль этой конгруэнции геодезических двумя разными способами: либо с помощью параллельного

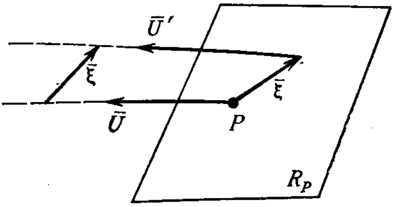

Рис. 6.5. Две параллельные геодезические $\bar{U}$ и $\bar{U}'$ и вектор $\bar{\xi}$, который соединяет их в плоскости R_P и параллельно переносится вдоль $\bar{U}$. Когда есть кручение, он "откручивается" от $\bar{U}'$.

переноса, либо с помощью переноса Ли. Пусть $\bar{\xi}$ перенесён параллельно. Тогда мы получаем из (6.15)

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i - T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Однако для исходного вектора $\bar{\xi}$ мы имеем $\nabla_{(S)\,\bar{\xi}}\bar{U} = 0$, иначе говоря, $(\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U})^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}U^j\xi^k$. Таким образом, в исходной точке

$$(\pounds_{\bar{U}}\bar{\xi})^i = -\frac{1}{2}T^i{}_{jk}\xi^j U^k.$$

Это означает, что при параллельном переносе вдоль построенной нами конгруэнции геодезических векторов $\bar{\xi}$ будет оставаться «прикреплённым» к кривым конгруэнции, если связность *симметрична*. Но если связность не симметрична, он не будет оставаться «прикреплённым». Грубо говоря, под действием кручения вектор $\bar{\xi}$ «вращается» относительно ближайших геодезических. И наоборот: если мы рассматриваем параллельно переносимый вектор $\bar{\xi}$ как определяющий некое «постоянное» направление, то конгруэнция «параллельных» геодезических будет при движении $\bar{\xi}$ «закручиваться» вокруг геодезической «несущей» $\bar{\xi}$. (Нельзя, однако, придать точный смысл словам «вращается» и «закручивается», если нет метрики.)

6.7. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В дальнейшем будет удобно использовать систему координат, основанную на геодезических. Чтоб построить её, заметим, что геодезические, проходящие через точку P, задают

1-1-отображение окрестности P на окрестность нуля в T_P. Это отображение строится так: каждый вектор из T_P однозначно определяет геодезическую, проходящую через точку P, и мы можем сопоставить ему точку этой геодезической, находящуюся на расстоянии $\Delta\lambda = 1$ (где λ — аффинный параметр) от точки P. (Напомним, что если два вектора из T_P параллельны, то их геодезические суть совпадающие, но по-разному параметризованные кривые, и, следовательно, построенное отображение «различает» точки на геодезической.) С помощью такого отображения мы можем, выбрав в T_P некоторый базис, определить *нормальные координаты* точки Q как компоненты вектора, связанного с этой точкой. Вообще говоря, это отображение будет взаимно-однозначным лишь в некоторой окрестности P, ибо геодезические на искривлённом многообразии могут пересекаться. Для некоторых связностей, таких как связность плоского пространства, оно будет взаимно-однозначным и на всём многообразии. (Отображение *из* T_P *в* многообразие корректно определено, даже если геодезические пересекаются. Оно называется *экспоненциальным отображением*. Если оно определено для всех элементов T_P во всех точках P, то многообразие называется *геодезически полным*.) Основная ценность нормальных координат для нас связана с тем, что в них $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ в точке P (но не всюду в окрестности P). Чтоб это увидеть, заметим, что если мы рассматриваем геодезическую, определяемую вектором $\bar{U}$ с компонентами $U^i(P)$, то координаты точки на этой геодезической, отвечающей аффинному параметру, равному λ, будут просто $x^i = \lambda U^i(P)$, если мы положили $\lambda = 0$ в P. Таким образом, $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2$ обращаются в нуль, а из (6.16c) видно, что $\Gamma^i{}_{jk}U^k(P)U^j(P)$ должно обращаться в нуль на всей кривой. Однако в точке P направление $\bar{U}$ было произвольным, откуда и следует, что $\Gamma^i{}_{jk}(P) = 0$.

Тот факт, что всегда можно выбрать координатную систему так, чтобы $\Gamma^i{}_{jk}$ обращалась в нуль в некоторой точке, ниже будет нам чрезвычайно полезен при доказательстве нескольких теорем. Поскольку в других точках $\Gamma^i{}_{jk}$ не обязаны обращаться в нуль, то и производные $\Gamma^i{}_{jk}$ в точке P нулю не равны.

6.8. ТЕНЗОР РИМАНА

Можно ожидать, что коммутатор двух ковариантных производных

$$[\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{V}}] \equiv \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{V}} - \nabla_{\bar{V}}\nabla_{\bar{U}}$$

будет дифференциальным оператором. Однако на самом деле он обладает следующим замечательным свойством: оператор