1-1-отображение окрестности P на окрестность нуля в T_P. Это отображение строится так: каждый вектор из T_P однозначно определяет геодезическую, проходящую через точку P, и мы можем сопоставить ему точку этой геодезической, находящуюся на расстоянии $\Delta\lambda = 1$ (где λ — аффинный параметр) от точки P. (Напомним, что если два вектора из T_P параллельны, то их геодезические суть совпадающие, но по-разному параметризованные кривые, и, следовательно, построенное отображение «различает» точки на геодезической.) С помощью такого отображения мы можем, выбрав в T_P некоторый базис, определить *нормальные координаты* точки Q как компоненты вектора, связанного с этой точкой. Вообще говоря, это отображение будет взаимно-однозначным лишь в некоторой окрестности P, ибо геодезические на искривлённом многообразии могут пересекаться. Для некоторых связностей, таких как связность плоского пространства, оно будет взаимно-однозначным и на всём многообразии. (Отображение *из* T_P *в* многообразие корректно определено, даже если геодезические пересекаются. Оно называется *экспоненциальным отображением*. Если оно определено для всех элементов T_P во всех точках P, то многообразие называется *геодезически полным*.) Основная ценность нормальных координат для нас связана с тем, что в них $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ в точке P (но не всюду в окрестности P). Чтоб это увидеть, заметим, что если мы рассматриваем геодезическую, определяемую вектором $\bar{U}$ с компонентами $U^i(P)$, то координаты точки на этой геодезической, отвечающей аффинному параметру, равному λ, будут просто $x^i = \lambda U^i(P)$, если мы положили $\lambda = 0$ в P. Таким образом, $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\lambda^2$ обращаются в нуль, а из (6.16c) видно, что $\Gamma^i{}_{jk}U^k(P)U^j(P)$ должно обращаться в нуль на всей кривой. Однако в точке P направление $\bar{U}$ было произвольным, откуда и следует, что $\Gamma^i{}_{jk}(P) = 0$.

Тот факт, что всегда можно выбрать координатную систему так, чтобы $\Gamma^i{}_{jk}$ обращалась в нуль в некоторой точке, ниже будет нам чрезвычайно полезен при доказательстве нескольких теорем. Поскольку в других точках $\Gamma^i{}_{jk}$ не обязаны обращаться в нуль, то и производные $\Gamma^i{}_{jk}$ в точке P нулю не равны.

6.8. ТЕНЗОР РИМАНА

Можно ожидать, что коммутатор двух ковариантных производных

$$[\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{V}}] \equiv \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{V}} - \nabla_{\bar{V}}\nabla_{\bar{U}}$$

будет дифференциальным оператором. Однако на самом деле он обладает следующим замечательным свойством: оператор

R, определённый формулой

$$\blacklozenge \quad [\nabla_{\bar U}, \nabla_{\bar V}] - \nabla_{[\bar U, \bar V]} \equiv \mathrm{R}(\bar U, \bar V), \tag{6.18}$$

есть *мультипликативный* оператор. Еще более замечательно то, что R также не зависит от производных $\bar U$ и $\bar V$. Эти свойства объясняются и доказываются в следующем упражнении.

Упражнение 6.13. Докажите, что для любой функции f

(a) $\mathrm{R}(\bar U, \bar V) f \bar W = f\mathrm{R}(\bar U, \bar V)\bar W$,

(b) $\mathrm{R}(f\bar U, \bar V)\bar W = f\mathrm{R}(\bar U, \bar V)\bar W$.

Благодаря этим свойствам (6.18) в действительности определяет *тензор*, называемый *тензором Римана*. Из (6.18) видно, что, при заданных векторах $\bar U$ и $\bar V$, R $(\bar U, \bar V)$ — это тензор типа $\binom{1}{1}$, поскольку, действуя на вектор, левая часть опять-таки даёт вектор. Если считать $\bar U$ и $\bar V$ аргументами, то тензор Римана становится тензором типа $\binom{1}{3}$. (Заметим, что принятое нами определение тензора Римана ((6.18) и (6.19)) отнюдь не является единственно возможным. Используются и другие определения, отличающиеся от нашего знаком или порядком аргументов. Справляясь в других книгах, проверьте, знаете ли вы, какое было использовано определение. Мы следуем Мизнеру, Торну и Уилеру (1977).)

Упражнение 6.14. Компоненты тензора Римана $R^i{}_{jkl}$ определяются формулой

$$[\nabla_i, \nabla_j]\,\bar e_k - \nabla_{[\bar e_i, \bar e_j]}\bar e_k = R^l{}_{kij}\bar e_l. \tag{6.19}$$

(a) покажите, что в *координатном* базисе

$$\blacklozenge \quad R^l{}_{kij} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^m{}_{kj}\Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki}\Gamma^l{}_{mj}. \tag{6.20}$$

(b) В некоординатном базисе определим перестановочные коэффициенты $C^i{}_{jk}$ формулой

$$[\bar e_j, \bar e_k] = C^i{}_{jk}\bar e_i. \tag{6.21}$$

Покажите, что

$$R^l{}_{kij} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^m{}_{kj}\Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki}\Gamma^l{}_{mj} - C^m{}_{ij}\Gamma^l{}_{km}, \tag{6.22}$$

где $f_{,i} \equiv \bar e_i[f]$.

(c) Покажите, что

$$R^l{}_{k(ij)} \equiv \frac{1}{2}(R^l{}_{kij} + R^l{}_{kji}) = 0 \tag{6.23a}$$

и

$$R^l{}_{[kij]} = 0. \tag{6.23b}$$

(Указание: для доказательства (6.23b) используйте нормальные координаты; ответ, конечно же, от выбора координат не зависит.)

(d) Используя (c), покажите, что на n-мерном многообразии число линейно-независимых компонент $R^l{}_{kij}$ равно

$$n^4 - n^2\frac{n(n+1)}{2} - n\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{3}n^2(n-1). \qquad (6.24)$$

Упражнение 6.15. Покажите, что

$$R^l{}_{k[ij;m]} = 0. \qquad (6.25)$$

Эти соотношения называются *тождествами Бьянки.* (Указание: опять работайте в нормальных координатах.) Покажите, что в координатном базисе эти тождества эквивалентны тождествам Якоби для ковариантных производных

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0.$$

[См. (2.14) и (3.9).]

6.9. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА

Так же, как и при интерпретации другого встречавшегося нам коммутатора, $[\bar{U}, \bar{V}]$, речь пойдёт о замкнутой или почти замкнутой петле. Наши рассуждения основаны на использовании экспонент от ковариантных производных и потому идут практически параллельно тому, что было в случае скобок Ли. Если векторное поле $\bar{A}$ определено вдоль кривой с касательным вектором $\bar{U}$, то параллельный перенос позволяет нам перенести $\bar{A}$ из любой точки кривой Q в любую другую её точку P. Полученный таким образом вектор $\bar{A}(Q \to P)$ из касательного пространства T_P (вообще говоря, не равный $\bar{A}(P)$) назовём образом $\bar{A}(Q)$ в P; он, конечно же, зависит от кривой. Действительно, если $\bar{A}$ и $\bar{U}$ аналитичны, мы можем записать следующий ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\bar{A}(Q \to P) &= \bar{A}(P) + \lambda\nabla_{\bar{U}}\bar{A}(P) + \tfrac{1}{2}\lambda^2\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{A}(P) + \ldots \\ &= \exp[\lambda\nabla_{\bar{U}}]\bar{A}|_P, \end{aligned} \qquad (6.26)$$

где λ — параметр кривой ($\bar{U} = d/d\lambda$), а обозначение «exp» опять всего лишь сокращённая запись предыдущей строки.

Теперь рассмотрим две конгруэнции с касательными векторами $\bar{U} = d/d\lambda$ и $\bar{V} = d/d\mu$, такими что $[\bar{U}, \bar{V}] = 0$. Тогда при пересечении они образуют замкнутые петли (рис. 6.6). Если мы параллельно перенесём вектор из некоторой точки R