

(Указание: для доказательства (6.23b) используйте нормальные координаты; ответ, конечно же, от выбора координат не зависит.)

(d) Используя (c), покажите, что на n -мерном многообразии число линейно-независимых компонент R^l_{kij} равно

$$n^4 - n^2 \frac{n(n+1)}{2} - n \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{3} n^2 (n-1). \quad (6.24)$$

Упражнение 6.15. Покажите, что

$$R^l_{k[ij; m]} = 0. \quad (6.25)$$

Эти соотношения называются *тождествами Бьянки*. (Указание: опять работайте в нормальных координатах.) Покажите, что в координатном базисе эти тождества эквивалентны тождествам Якоби для ковариантных производных

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0.$$

[См. (2.14) и (3.9).]

6.9. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА

Так же, как и при интерпретации другого встречавшегося нам коммутатора, $[\bar{U}, \bar{V}]$, речь пойдёт о замкнутой или почти замкнутой петле. Наши рассуждения основаны на использовании экспонент от ковариантных производных и потому идут практически параллельно тому, что было в случае скобок Ли. Если векторное поле \bar{A} определено вдоль кривой с касательным вектором \bar{U} , то параллельный перенос позволяет нам перенести \bar{A} из любой точки кривой Q в любую другую её точку P . Полученный таким образом вектор $\bar{A}(Q \rightarrow P)$ из касательного пространства T_P (вообще говоря, не равный $\bar{A}(P)$) назовём образом $\bar{A}(Q)$ в P ; он, конечно же, зависит от кривой. Действительно, если \bar{A} и \bar{U} аналитичны, мы можем записать следующий ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \bar{A}(Q \rightarrow P) &= \bar{A}(P) + \lambda \nabla_{\bar{U}} \bar{A}(P) + \frac{1}{2} \lambda^2 \nabla_{\bar{U}} \nabla_{\bar{U}} \bar{A}(P) + \dots \\ &= \exp[\lambda \nabla_{\bar{U}}] \bar{A}|_P, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где λ — параметр кривой ($\bar{U} = d/d\lambda$), а обозначение «exp» опять всего лишь сокращённая запись предыдущей строки.

Теперь рассмотрим две конгруэнции с касательными векторами $\bar{U} = d/d\lambda$ и $\bar{V} = d/d\mu$, такими что $[\bar{U}, \bar{V}] = 0$. Тогда при пересечении они образуют замкнутые петли (рис. 6.6). Если мы параллельно перенесём вектор из некоторой точки R

вдоль кривой \bar{V} в точку Q , как показано на рисунке, то получим вектор

$$\bar{A}(R \rightarrow Q) = \exp[\mu \nabla_{\bar{V}}] \bar{A}|_Q,$$

где μ — изменение параметра при переходе от Q к R . Если теперь мы параллельно перенесём полученный вектор из Q в P , то в точке P получим вектор

$$\bar{A}(R \rightarrow Q \rightarrow P) = \exp[\lambda \nabla_{\bar{U}}] \exp[\mu \nabla_{\bar{V}}] \bar{A}|_P,$$

где λ — изменение параметра при переходе от P к Q . Но можно сделать перенос и по другому пути, а именно сначала

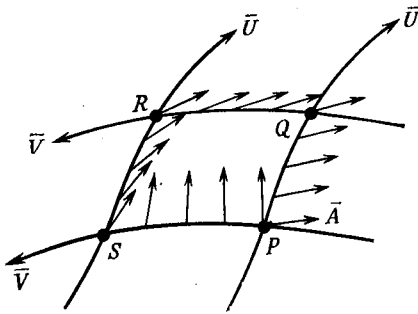


Рис. 6.6. В результате параллельного переноса вокруг замкнутой петли получается вектор, вообще говоря, не совпадающий с исходным.

пойти в точку S («расстояние» λ вдоль \bar{U} -кривой), а потом — в P («расстояние» μ вдоль \bar{V} -кривой). Значения λ и μ будут те же, поскольку \bar{U} и \bar{V} коммутируют. При втором способе получаем

$$\bar{A}(R \rightarrow S \rightarrow P) = \exp[\mu \nabla_{\bar{V}}] \exp[\lambda \nabla_{\bar{U}}] \bar{A}|_P.$$

При малых λ и μ мы можем найти разность $\delta \bar{A}$ векторов, получаемых этими двумя способами, с помощью разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} \delta \bar{A} &= [e^{\lambda \nabla_{\bar{U}}}, e^{\mu \nabla_{\bar{V}}}] \bar{A} \\ &= [1 + \lambda \nabla_{\bar{U}} + \frac{1}{2} \lambda^2 \nabla_{\bar{U}} \nabla_{\bar{U}}, 1 + \mu \nabla_{\bar{V}} + \frac{1}{2} \mu^2 \nabla_{\bar{V}} \nabla_{\bar{V}}] \bar{A} + O(3), \end{aligned}$$

где через $O(3)$ обозначены члены, имеющие по μ и λ суммарную степень ≥ 3 . После некоторых преобразований приходим к равенству

$$\delta \bar{A} = \lambda \mu [\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{V}}] \bar{A} + O(3); \tag{6.27}$$

но это как раз и есть тензор Римана, причём производные от \bar{A} сюда не вошли. На $\delta \bar{A}$ можно также смотреть как на изме-

нение \bar{A} при параллельном переносе его вдоль замкнутой петли $PQRSP$. Это изменение как раз и равно значению тензора Римана, умноженному на «площадь» петли, $\lambda\mu$:

$$\delta A^i = \lambda\mu R^i{}_{jkl} A^j U^k V^l.$$

Другой существенный для геометрий аспект тензора Римана связан с *девиацией геодезических*, т. е. с тем фактом, что геодезические, бывшие в начале параллельными, теряют

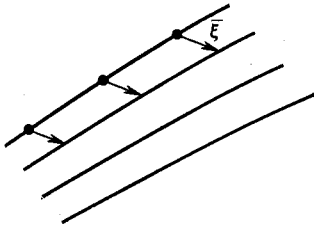


Рис. 6.7. Соединяющий кривые конгруэнции геодезических вектор $\bar{\xi}$ ли-переносится вдоль конгруэнции.

в дальнейшем это свойство. Чтоб измерить этот эффект, рассмотрим конгруэнцию геодезических с касательным вектором \bar{U} ($\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$) и соединяющий кривые конгруэнции вектор $\bar{\xi}$, который перемещается по кривым с помощью переноса Ли ($\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{\xi} = 0$) (см. рис. 6.7). Метрой девиации геодезических будет служить изменение вектора $\bar{\xi}$. Его первая производная

$\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$ зависит от начальных условий, от того, параллельны исходные геодезические или нет. Геометрия сидит во второй производной $\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi}$, которая говорит, как меняется исходная степень разделения геодезических. Итак, мы имеем

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = \nabla_{\bar{U}}(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{\xi} + \nabla_{\bar{\xi}}\bar{U}) = \nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{\xi}}\bar{U} = [\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{\xi}}]\bar{U} + \nabla_{\bar{\xi}}\nabla_{\bar{U}}\bar{U}.$$

На первом шаге использовано упр. 6.11. Последний член в правой части обращается в нуль, поскольку \bar{U} — геодезическая, и мы получаем

$$\nabla_{\bar{U}}\nabla_{\bar{U}}\bar{\xi} = R(\bar{U}, \bar{\xi})\bar{U}, \quad (6.28a)$$

или в компонентах

$$(\xi^i{}_{;j} U^j)_{;k} U^k = R^i{}_{jkl} \bar{U}^j \bar{U}^k \xi^l.$$

Заметим, что левую часть можно упростить, поскольку $U^j{}_{;k} U^k = 0$; это даёт

$$\xi^i{}_{;j} U^j U^k = R^i{}_{jkl} U^j U^k \xi^l. \quad (6.28b)$$

Уравнение (6.28) называется уравнением *девиации геодезических*.