ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

2.1. $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}] = -\hat{\boldsymbol{\theta}}/r \neq 0$.

2.2. (b) Поскольку $a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda + \mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu = \mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu + a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, то из (2.13) следует, что $\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]\exp[\mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu] = \exp[\mathrm{bd}/\mathrm{d}\mu]\exp[a\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda]$, откуда получаем $[\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu] = 0$. И наоборот, если порядок $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ и $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ в правой части (2.13) роли не играет, то с ними можно обращаться как с простыми числами, для которых (2.13) выполнено.

2.3. Разверните каждое слагаемое (например, $[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - \bar{Y}\bar{X}\bar{Z} - \bar{Z}\bar{X}\bar{Y} + \bar{Z}\bar{Y}\bar{X}$). Каждый член этого разложения — дифференциальный оператор на функциях. Условие принадлежности классу C^2 гарантирует, что каждый член разложения существует. После того как все слагаемые в (2.14) так разложены, результат становится очевиден.

2.4. Чтобы получить из матрицы, являющейся тензором типа $\binom{1}{1}$, число, нужны один вектор и одна один-форма. Поскольку у нас в деле участвуют две матрицы, то, чтобы связать с преобразованием число, нужны два вектора и две один-формы. Линейность проверяется легко.

2.5. В случае размерности n у тензора типа $\binom{2}{0}$ имеется n^2 независимых компонент, а у пары векторов — всего лишь $2n$ компонент. Вообще говоря, этого недостаточно.

2.6. Линейная комбинация двух тензоров типа $\binom{2}{0}$ определяется своими значениями на двух произвольных один-формах: $(a\mathbf{h} + \beta\mathbf{r})(\tilde{p}, \tilde{q}) = a\mathbf{h}(\tilde{p}, \tilde{q}) + \beta\mathbf{r}(\tilde{p}, \tilde{q})$. Она является линейной функцией от $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, а следовательно, $\binom{2}{0}$-тензором. Нулевой тензор равен нулю на любых двух $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, и все аксиомы векторного пространства, очевидно, выполняются. Наше пространство имеет размерность n^2, поскольку любой тензор полностью определяется своими компонентами $\mathbf{h}(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = h^{ij}$. Тензоры $\{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j\}$ (их n^2 штук) образуют базис, поскольку они линейно-независимы: линейная комбинация $\beta^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда все β^{ij} — нули, что легко увидеть, подействовав этим тензором на всевозможные пары базисных один-форм. На самом деле, как нетрудно проверить, $\mathsf{h} = h^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$.

2.7. Шесть. Шесть.

2.8. Линейность: $\mathsf{C}(a\bar{V} + b\bar{W}) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(a\bar{V} + b\bar{W})) = \mathsf{B}(a\mathsf{A}(\bar{V}) + b\mathsf{A}(\bar{W})) = a\mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{V})) + b\mathsf{B}(\mathsf{A}(\bar{W})) = a\mathsf{C}(\bar{V}) + b\mathsf{C}(\bar{W})$.

Компоненты: если $\mathsf{A}(\bar{e}_j) = A^k{}_j\bar{e}_k$, то $\mathsf{C}(\bar{e}_j) = \mathsf{B}(\mathsf{A}^k{}_j\bar{e}_k) = \mathsf{B}(\bar{e}_k)\mathsf{A}^k{}_j = B^i{}_k A^k{}_j \bar{e}_i$, откуда и следует ответ.

Каждый $\binom{1}{1}$-тензор — это линейное преобразование в T_P. Из полученного результата видно, что линейные преобразования образуют группу относительно операции композиции (с помощью которой мы получили C из A и B).

2.9. $\mathsf{T}(\tilde{\omega}^{i'}, \tilde{\omega}^{j'}) = \mathsf{T}(\Lambda^{i'}{}_k\tilde{\omega}^k, \Lambda^{j'}{}_l\tilde{\omega}^l) = \Lambda^{i'}{}_k\Lambda^{j'}{}_l\mathsf{T}(\tilde{\omega}^k, \tilde{\omega}^l)$. На случай N индексов $(i' \ldots j')$ и N'индексов $(k' \ldots l')$ это обобщается так: $\mathsf{T}^{i' \ldots j'}{}_{k' \ldots l'} = \Lambda^{i'}{}_r \ldots \Lambda^{j'}{}_s\Lambda^t{}_{k'} \ldots \Lambda^u{}_{l'}T^{r \ldots s}{}_{t \ldots u}$.

2.10. Это верно для любого векторного пространства: нулевой элемент определяется однозначно.

2.11. Значение нашего «тензора» (в исходном базисе) на один-форме $\tilde{p}$ и векторе $\bar{V}$ есть $A^i{}_jV^jP_i$. В новом же базисе, используя новые компоненты для всех величин, мы получаем: $A^{i'}{}_{j'}V^{j'}P_{i'} = (\Lambda^{i'}{}_r\Lambda^s{}_{j'}A^r{}_s)(\Lambda^{j'}{}_kV^k)(\Lambda^l{}_{i'}P_l)$. Просуммировав по i' и j', а затем использовав (2.34), мы получим старый ответ. Таким образом, наше правило сопоставляет вектору и один-форме вещественное число, не зависящее от выбора базиса.

2.12.

(a) $\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ приводит к каноническому виду $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. (a) Закон преобразования можно получить из (2.55). Как функция от один-форм g удовлетворяет равенству $\mathsf{g}^{-1}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \mathsf{g}(\bar{p}, \bar{q})$, откуда следуют (2.55) и, очевидным образом, свойство линейности.

(b) В таком базисе метрика имеет компоненты $\pm\delta_{ij}$, следовательно, обратная матрица g^{-1} имеет те же компоненты $\pm\delta^{ij}$.

2.14. Разложите g_{ij} и $\Lambda^i{}_{j'}$ в ряд Тэйлора в точке P. Попытайтесь удовлетворить (i) и (ii), подобрав по произвольным коэффициентам разложения g_{ij} соответствующие коэффициенты разложения $\Lambda^i{}_{j'}$. Подсчётом числа коэффициентов покажите, что (i)—(iii) имеют место. Обратите внимание на то, что не все $\partial\Lambda^i{}_{j'}/\partial x^{k'}$ в точке P независимы, поскольку из $\Lambda^i{}_{j'}=\partial x^i/\partial x^{j'}$ следует, что $\partial\Lambda^i{}_{j'}/\partial x^{k'}=\partial\Lambda^i{}_{k'}/\partial x^{j'}$.

2.15. (a) $g_{rr}=1$, $g_{r\theta}=0$, $g_{\theta\theta}=r^2$.

(b) Базис ортонормирован; $\hat{r}=\partial/\partial r$, $\hat{\theta}=r^{-1}\partial/\partial\theta$.

2.16. (a) $\tilde{d}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial r, \partial f/\partial\theta)$, $\bar{d}f$ имеет компоненты $(\partial f/\partial r, r^{-2}\partial f/\partial\theta)$.

(b) В этом ортонормированном базисе и $\tilde{d}f$ и $\bar{d}f$ имеют компоненты $(\partial f/\partial r, r^{-1}\partial f/\partial\theta)$.

3.1. (a) В случае функций из (3.3) следует, что в обеих частях (3.8) стоит оператор $[\bar{V}, \bar{W}]$. В случае векторного поля $\bar{U}$ из (3.6) следует, что левая часть имеет вид $[\bar{V}, [\bar{W}, \bar{U}]]-[\bar{W}, [\bar{V}, \bar{U}]]$, а правая часть равна $[[\bar{V}, \bar{W}], \bar{U}]$. Наш результат следует теперь из тождества Якоби (упр. 2.3) и антисимметричности скобок Ли.

(b) В случае функций опять используем тождество Якоби (2.14). В случае векторов тождество (3.8) превращает (3.9) в производную Ли по направлению нулевого вектора $[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}]+[[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}]+[[\bar{Z}, \bar{X}], \bar{Y}]$.

3.2. (b) $\pounds_{\bar{V}}\bar{U}=\pounds_{\bar{V}}(U^i\bar{e}_i)=(\pounds_{\bar{V}}U^i)\bar{e}_i+U^i\pounds_{\bar{V}}\bar{e}_i=$

$[V^j\bar{e}_j(U^i)]\bar{e}_i-\bar{U}^i\pounds_{\bar{e}_i}(V^j\bar{e}_j)=[V^j\bar{e}_j(\tilde{U}^i)-U^j\bar{e}_jV^i]\bar{e}_i-U^kV^j\pounds_{\bar{e}_k}\bar{e}_j.$

Последний шаг требует переобозначения индексов. Используя (3.7) в последнем слагаемом, получаем требуемый ответ.

3.3. Это следует из (2.7) при $V^i=\delta^i{}_1$.

3.4. Из (3.13) получаем

$$(\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega})_i W^i=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\omega_i W^i)-\omega_i\left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}W^i-W^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i\right)$$
$$=\left(V^j\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i+\omega_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j\right)W^i,$$

где индексы во втором слагаемом переобозначены. Ответ следует из произвольности W^i.

3.5. (a) $\left[\sum_a \alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \sum_b \beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}\right] = \sum_{a,\,b} \left[\alpha_{(a)}\bar{A}_{(a)},\ \beta_{(b)}\bar{A}_{(b)}\right]$

$$= \sum_{a,\,b} \{\alpha_{(a)}\beta_{(b)}\,[\bar{A}_{(a)},\ A_{(b)}] + \alpha_{(a)}\,[\bar{A}_{(a)}\,(\beta_{(b)})]\,\bar{A}_{(b)} - \beta_{(b)}\,[\bar{A}_{(b)}\,(\alpha_{(a)})]\,\bar{A}_{(a)}\}.$$

3.6. $(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{T})^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} = V^r \dfrac{\partial}{\partial x^r} T^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} - T^{r\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l}\dfrac{\partial}{\partial x^r} V^i - \dots - T^{i\,\dots\,r}{}_{k\,\dots\,l}\dfrac{\partial}{\partial x^r} V^j + T^{i\,\dots\,j}{}_{r\,\dots\,l}\dfrac{\partial}{\partial x^k} V^r + \dots + T^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,r}\dfrac{\partial}{\partial x^l} V^r$.

Положив $V^i = \delta^i_1$, получим $(\pounds_{\bar{V}}\mathrm{T})^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l} = \partial \mathrm{T}^{i\,\dots\,j}{}_{k\,\dots\,l}/\partial x^1$.

3.7. $[L^2,\ \pounds_{\bar{l}_z}] = \pounds_{\bar{l}_x}[\pounds_{\bar{l}_x},\ \pounds_{\bar{l}_z}] + [\pounds_{\bar{l}_x},\ \pounds_{\bar{l}_z}]\pounds_{\bar{l}_x} + \pounds_{\bar{l}_y} \times [\pounds_{\bar{l}_y},\ \pounds_{\bar{l}_z}] + [\pounds_{\bar{l}_y},\ \pounds_{\bar{l}_z}]\pounds_{\bar{l}_y} = \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_y} + \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_x} - \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_x} - \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_y} = 0.$

Второй шаг основан на тождестве (3.8). Чтобы доказать (3.33), выведите следующие соотношения: $\bar{l}_x = -\sin\varphi\partial/\partial\theta - \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\partial/\partial\varphi$; $\bar{l}_y = -\cos\varphi\partial/\partial\theta + \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\partial/\partial\varphi$; $\bar{l}_z = \partial/\partial\varphi$.

3.8. Это тривиально следует из того, что $\pounds_{a\bar{V}} = a\pounds_{\bar{V}}$, если a — *константа*. (Это неверно, если a — произвольная функция.)

3.9. При переносе Ли вдоль φ из $\varphi = 0$ вектор $\bar{e}_z$ не меняется, а $\bar{e}_x$ превращается в $\bar{e}_r = \cos\varphi\bar{e}_x + \sin\varphi\bar{e}_y$. Третий базисный вектор $\bar{e}_\varphi$ в декартовом базисе имеет вид $-\sin\varphi\bar{e}_x + \cos\varphi\bar{e}_y$. Три векторные гармоники — это: $\exp(2i\varphi)\bar{e}_z$, $\exp(2i\varphi)(\cos\varphi\bar{e}_x + \sin\varphi\bar{e}_y)$, $\exp(2i\varphi)(-\sin\varphi\bar{e}_x + \cos\varphi\bar{e}_y)$. Иногда удобнее перейти к их линейным комбинациям: $\exp(2i\varphi)\bar{e}_z$, $\exp(i\varphi)(\bar{e}_x + i\bar{e}_y)$, $\exp(3i\varphi)(\bar{e}_x - i\bar{e}_y)$. Отсюда видно, что $\bar{e}_x + i\bar{e}_y$ имеет собственное значение $+1$, а $\bar{e}_x - i\bar{e}_y$ — собственное значение -1, что впрочем легко и прямо проверить. Перенос Ли не меняет один-форму $\tilde{d}z$, а $\tilde{d}x$ переходит в $\tilde{d}r = \cos\varphi\tilde{d}x + \sin\varphi\tilde{d}y$. Третья базисная один-форма $\tilde{d}\varphi$ в декартовом базисе имеет вид $-\sin\varphi\tilde{d}x + \cos\varphi\tilde{d}y$. Поэтому тремя гармониками для один-форм будут: $\exp(2i\varphi)\tilde{d}z$, $\exp(i\varphi)(\tilde{d}x + i\tilde{d}y)$, $\exp(3i\varphi)(\tilde{d}x - i\tilde{d}y)$. Поскольку $\pounds_{\bar{e}_\varphi} f = 2if$, то $\tilde{d}(\pounds_{\bar{e}_\varphi} f) = 2i\tilde{d}f$. Кроме того, как легко показать (используя цилиндрические координаты), $\tilde{d}(\pounds_{\bar{e}_\varphi} f) = \pounds_{\bar{e}_\varphi}(\tilde{d}f)$, что и завершает доказательство. Последнее равенство есть частный случай общей теоремы, которая будет доказана ниже, в § 4.21.

3.10. Правоинвариантное векторное поле инвариантно относительно отображений R_g, которые порождаются правыми сдвигами так же, как L_g — левыми. Рисунок 3.10 «верен», и в этом случае, следовательно, такие поля образуют алгебру Ли. Интегральные кривые правоинвариантных векторных полей, проходящие через e, являются однопараметрическими подгруппами по тем же причинам, что и в случае левоинвариантных полей. Таким образом, однопараметрические подгруппы находятся в 1-1-соответствии сразу с обоими семействами интегральных кривых; следовательно, кривые в этих семействах одни и те же. Интегральные кривые левоинвариантного поля, не проходящие через e, получаются левым сдвигом из кривых, проходящих через e, т. е. из однопараметрических подгрупп. Кривая поля $\bar{V}$, проходящая, например, через точку h, — это $hg_{\bar{V}_e}(t)$. Тогда интегральная кривая правоинвариантного поля, проходящая через h, будет иметь вид $g_{\bar{V}_e}(t)\,h$. Эти выражения различны, за исключением случая, когда $g_{\bar{V}_e}(t)$ и h коммутируют.

3.11 (a) Поскольку левые сдвиги на h^{-1} взаимно-однозначно отображают окрестность h на окрестность e, отображение векторных полей L_h также будет взаимно-однозначным и обратимым. Отсюда следует, что если $\{\bar{V}_i(e)\}$ линейно-независимы, то это верно для $\{L_h\bar{V}_i(e) \equiv \bar{V}_i(h)\}$ при любом h.

(b) Дело в том, что поля $\{\bar{V}_i\}$ образуют глобальный базис и любое векторное поле определяется заданием $\{\alpha_i(g)\}$ для всех g. Это отображает TG на $G \times R^n$.

3.12. (b) Ключевой момент: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}ABB^{-1}AB \ldots B^{-1}AB = B^{-1}A^nB$.

(c) Экспонента от блочно-диагональной матрицы легко вычисляется, поскольку

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & P_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & P_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (P_1)^n & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & (P_2)^n & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & (P_3)^n & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

в случае (i) $\exp(t\lambda_j)$ — это обычная экспонента. В случае (ii)

$$\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j & s_j \\ -s_j & r_j \end{pmatrix}\right]$$

$$= \exp\left[t\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_j + is_j & 0 \\ 0 & r_j - is_j \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\exp\left[t\begin{pmatrix} r_j + is_j & 0 \\ 0 & r_j - is_j \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix}\exp(tr_l)\begin{pmatrix}\cos tr_l+i\sin ts_l & 0\\ 0 & \cos tr_l-\mathrm{i}\sin ts_l\end{pmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix},$$

откуда и следует ответ. В случае (iii), немного повозившись можно проверить формулу

$$\begin{bmatrix}x & 1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & x & 1 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & x & 1 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}x^n & \frac{d}{dx}x^n & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}x^n & \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}x^n & \dots\\ 0 & x^n & \frac{d}{dx}x^n & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}x^n & \dots\\ 0 & 0 & x^n & \frac{d}{dx}x^n & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.$$

Умножив на t^n и подставив в разложение экспоненты, получим (3.59c).

3.13. Семейство матриц

$$\begin{pmatrix}\cos t & \sin(t/2)\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

— непрерывная кривая, содержащая e (при $t=0$) и

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(при $t=\pi$). Рассматриваемая матрица не принадлежит никакой однопараметрической подгруппе, поскольку не является экспонентой ни от какой матрицы, что следует из упр. 3.12. Легко проверить, что ни одну из матриц вида (3.59) нельзя преобразовать с помощью (3.56) в рассматриваемую матрицу, поскольку на диагонали стоят отрицательные числа.

3.14. (a) Собственное значение λ матрицы A удовлетворяет уравнению $\det(A-\lambda I)=0=\det(A-\lambda I)^T=\det(A^T-\lambda I)=\det(A^{-1}-\lambda I)$ и поэтому является собственным значением A^{-1}. Верно и обратное.

(b) $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow 0 = \det(A^{-1})\det(A - \lambda I) = \det(I - \lambda A^{-1}) = \det(-\lambda I)\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I)$. Так как $\det(A) \neq 0$, то все собственные значения отличны от нуля и, следовательно, $\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I) = 0$. Таким образом, если A — из $O(n)$ и λ — собственное значение A, то им будет и $1/\lambda$. Но поскольку уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ вещественное, то его решения образуют пары комплексно-сопряжённых чисел. Чтобы два числа в такой паре были взаимно обратны, они должны иметь вид $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$.

(c) Такая форма есть как раз (3.58a, b) при специальных собственных значениях, причём (3.62b) — это частный случай (3.62c). Случай (3.58c) с $\mu_i = \pm 1$ следует исключить. Такая форма невозможна, поскольку $B^{-1}AB$ принадлежит $O(n)$, а (3.58c), очевидно, нет.

(d) Чтобы найти алгебру Ли данной группы, достаточно рассмотреть касательное пространство произвольного её элемента, например e, поэтому мы можем ограничиться рассмотрением генераторов однопараметрических подгрупп в $SO(n)$. Задачу можно решить, привлекая каноническую форму, но быстрее следующий способ. Возьмём элемент $\exp(tA)$, где A принадлежит алгебре Ли группы $O(n)$. Тогда $[\exp(tA)]^{-1} = \exp(-tA)$ и $[\exp(tA)]^T = \exp(tA^T)$. Эти выражения равны при любом t, следовательно, $A^T = -A$. Обратное доказывается так же. Размерность $O(n)$ есть максимальное число линейно-независимых антисимметричных матриц размера $n \times n$, а оно равно $n(n-1)/2$.

3.15. Матрица A принадлежит $SO(n)$ тогда и только тогда, когда в её канонической форме (3.62) чётное число блоков (-1). Элемент из $O(n)$, не принадлежащий $SO(n)$, имеет нечётное число блоков (-1) и может быть тривиально получен из элемента $SO(n)$ указанным преобразованием.

3.16. Как было сказано в указаниях к предыдущей задаче, в канонической форме матрицы A из $SO(n)$ чётное число блоков (-1), на которые можно смотреть как на частный случай блоков (3.62c) при $\theta = \pi$. Любая из канонических форм (3.62a), (3.62c) есть частный случай экспонент (3.59a) или (3.59b). В канонической форме для матриц из группы $SO(3)$ один блок должен быть (3.62a), а другой — (3.62c). Собственный вектор для (3.62a) — это ось вращения.

3.17. Воспользуйтесь (3.60).

3.18. Матрица $\mathrm{diag}[\exp(\mathrm{i}a_1 t), \exp(\mathrm{i}a_2 t), \ldots]$ есть экспонента от матрицы $\mathrm{diag}(\mathrm{i}a_1 t, \mathrm{i}a_2 t, \ldots)$. Определитель первой матрицы равен $\exp\left(\mathrm{i}t \sum_j a_j\right)$, и если он равен 1, то след второй матрицы равен 0. Зададим соответствие между комплексными числами и 2×2-матрицами правилом $a+\mathrm{i}b \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Оно устойчиво относительно умножения: $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. Таким образом, это групповой изоморфизм между комплексными числами и матрицами специального вида. (На самом деле это изоморфизм алгебр, так как он устойчив и относительно сложения.) Эта конструкция обобщается до изоморфизма между $GL(n, \mathrm{C})$ и подгруппой в $GL(2n, \mathrm{R})$, состоящей из матриц, построенных из 2×2-блоков вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Эрмитову сопряжению в $GL(n, \mathrm{C})$, очевидно, соответствует транспонирование в $GL(2n, \mathrm{R})$. Итак, мы можем считать $U(n)$ подгруппой в $O(2n)$. Поскольку генераторы $O(2n)$ — это антисимметричные $2n\times 2n$-матрицы, то генераторы $U(n)$ — это антиэрмитовы матрицы. В силу нашего первого замечания и упр. 3.20(a), эти матрицы должны иметь нулевой след.

3.20. (a) $(B^{-1}AB)^i{}_k = (B^{-1})^i{}_l A^l{}_m B^m{}_k$. Но $(B^{-1})^i{}_l B^m{}_i = \delta^m{}_l$, поэтому $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$.

(b) Поскольку $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$, то $\det(\exp(A)) = \det(B^{-1}\exp(A)B) = \det(\exp(B^{-1}AB))$; далее $\exp(\operatorname{tr}(A)) = \exp(B^{-1}(\operatorname{tr} A)B) = \exp(\operatorname{tr}(B^{-1}AB))$. Таким образом, достаточно доказать (3.67) для различных канонических форм. Для формы (3.58a) это тривиально. Для (3.58b) всё сразу следует из рассмотрения (3.59b). Аналогично обстоит дело с (3.58c), поскольку матрица в (3.59c) имеет единичный определитель.

3.21. (a) Воспользуйтесь тождеством $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a}$.

3.22. (a) Учтите, что $\det\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2$ обращается в нуль только для нулевой матрицы.

(b) Размерность равна 4, так как для задания элемента из H нужны четыре независимых вещественных числа.

(d) Уравнение (3.73) есть уравнение сферы S^3, и искомое 1-1-отображение ставит матрице A в соответствие точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ сферы S^3 в R^4.

3.23. Поскольку $[g(s)]^{-1} = \exp(-s\bar{Y})$, мы можем записать (3.79) в виде

$$\exp(s\bar{Y})\exp(t\bar{X})\exp(-s\bar{Y}) = \exp[t\,\mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X})].$$

Дифференцируя обе части по t, получаем при $t=0$

$$\exp(s\bar{Y})\bar{X}\exp(-s\bar{Y}) = \mathrm{Ad}_{g(s)}(\bar{X}).$$

Разложив левую часть по степеням s:

$$\bar{X}+s[\bar{Y},\ \bar{X}]+\frac{1}{2}s^2[\bar{Y},\ [\bar{Y},\ \bar{X}]]+\frac{1}{3}s^3[\bar{Y},[\bar{Y},[\bar{Y},X]]]+\ldots,$$

получаем ответ.

3.24. (b) $\bar{l}_x(Y_{1-1})=\mathrm{i}Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{1-1})=Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_z(Y_{1-1})=\mathrm{i}Y_{1-1}$; $\bar{l}_x(Y_{10})=\mathrm{i}(Y_{1-1}-Y_{11})/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{10})=-(Y_{1-1}+Y_{11})/\sqrt{2}$; $\bar{l}_zY_{10}=0$; $\bar{l}_x(Y_{11})=-\mathrm{i}Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_y(Y_{11})=Y_{10}/\sqrt{2}$; $\bar{l}_z(Y_{11})=\mathrm{i}Y_{11}$. Поэтому любая комплексная линейная комбинация этих трёх функций переводится дифференцированием вдоль $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$, $\bar{l}_z$ снова в линейную комбинацию этих функций.

3.25. Из первого равенства (3.30) следует, что $\bar{l}_z(f)=0$. Тогда из двух оставшихся получаем $\bar{l}_x(f)=\bar{l}_y(f)=0$. Итак, f постоянна на сфере.

3.26. $\Lambda^{j'}{}_k=\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$;

$$\Lambda^k{}_{j'}=\frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix};$$

$$X^{j'}{}_{k'}\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix};\qquad X^j{}_k=L_1.$$

4.1. $$\mathbf{B}(\bar{U}+\bar{W},\ \bar{U}+\bar{W})=0=\mathbf{B}(\bar{U},\ \bar{U})+\mathbf{B}(\bar{U},\ \bar{W})+\mathbf{B}(\bar{W},\ \bar{U})+\mathbf{B}(\bar{W},\ \bar{W})=\mathbf{B}(\bar{U},\ \bar{W})+\mathbf{B}(\bar{W},\ \bar{U}).$$

4.2. (a) $$\tilde{p}(\ldots,\ \bar{U},\ \ldots,\ \bar{W},\ \ldots)=p_{\ldots i\ldots j\ldots}U^iW^j=-p_{\ldots j\ldots i\ldots}U^iW^j=-\tilde{p}(\ldots,\ \bar{W},\ \ldots,\ \bar{U},\ \ldots).$$

(b) следует из равенств $A_{ijk}=-A_{jik}=A_{kij}$ и т. д.

(c) $A_{ij}B^{ij}=\frac{1}{2}A_{ij}B^{ij}+\frac{1}{2}A_{ji}B^{ji}=\frac{1}{2}(A_{ij}B^{ij}-A_{ij}B^{ji})=A_{ij}B^{[ij]}$. Первый шаг сводится к перестановке немых индексов.

(d) $B^{[ij]}=\frac{1}{2}[\mathbf{B}(\tilde{\omega}^i,\ \tilde{\omega}^j)-\mathbf{B}(\tilde{\omega}^j,\ \tilde{\omega}^i)]=0.$

4.3. Компоненты p-формы $\tilde{\omega}$ — это её значения на p базисных векторах. Если $p>n$, то найдутся по крайней мере два совпадающих вектора. Их перестановка ничего не меняет, но в то же время знак компоненты должен измениться. Единственное число, равное самому себе со знаком минус, — это нуль.

4.4. Надо лишь показать, что сумма двух p-форм есть p-форма, т. е. является антисимметричной, и что p-форма, умноженная на число, — тоже p-форма. Размерность нашего пространства — это число независимых компонент p-формы, равное C_p^n, как видно из (4.7).

4.5. $\tilde{p} \wedge \tilde{q}(\bar{U}, \bar{V}) = \tilde{p}(\bar{U})\tilde{q}(\bar{V}) - \tilde{q}(\bar{U})\tilde{p}(\bar{V}) = -\tilde{p} \wedge \tilde{q}(\bar{V}, \bar{U})$. Очевидно, что $\tilde{p} \wedge \tilde{p}(\bar{U}, \bar{V}) = 0$ при любых $\bar{U}$, $\bar{V}$.

4.6. Проверка (4.9): $\tilde{\alpha}(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2}\alpha_{ij}[\tilde{\omega}^i(U)\tilde{\omega}^j(V) - \tilde{\omega}^j(\bar{U})\tilde{\omega}^i(\bar{V})] = \frac{1}{2}\alpha_{ij}(U^iV^j - V^iU^j) = \frac{1}{2}\alpha_{ij}U^iV^j + \frac{1}{2}\alpha_{ji}V^iU^j = \alpha_{ij}U^iV^j$. Число независимых два-форм $\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$, равное $n(n-1)/2$, и есть размерность пространства два-форм.

4.7. По формуле бинома Ньютона $(1+1)^n = \sum_{p=0}^n C_p^n$. Обратите внимание, что в сумме есть член с $p = 0$, отвечающий одномерному пространству нуль-форм.

4.8. Из равенства (4.9) и его обобщения мы знаем, что $\tilde{q} = (1/2!)\,q_{jk}\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$ и $\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (1/3!)(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk}\,\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$. Но $\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (1/2!)\,p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i \wedge (\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k) = (1/2!)\,p_iq_{jk}\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k = (1/2!)\,p_{[i}q_{jk]}\,\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k$. Поскольку $\{\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k\}$ образуют базис, мы видим, что $(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = (3!/2!)\,p_{[i}q_{jk]} = \frac{1}{2}(p_iq_{jk} + p_kq_{ij} + p_jq_{ki} - p_iq_{kj} - p_kq_{ji} - p_jq_{ik}) = p_iq_{jk} + p_kq_{ij} + p_jq_{ki}$. Обобщение до (4.11) прямо отсюда следует. Напомним, что $C_p^{p+q} = C_q^{p+q}$, поэтому $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ входят в (4.11) равноправно.

4.9. Обе части равенства (4.16) билинейны по $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\alpha}$, поэтому достаточно доказать его в случае $\tilde{\beta} = \tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p$ и $\tilde{\alpha} = \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q}$. Тогда $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\xi) = (\tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})(\xi)$. В этом внешнем произведении имеется $(p+q)!$ членов, отвечающих всевозможным перестановкам индексов. Те члены, где первой стоит форма $\tilde{\omega}^1$, при свёртке с ξ дают $\tilde{\omega}^1(\xi)(\tilde{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$. Каждый член с $\tilde{\omega}^2$, стоящей на первом месте, получается из членов со-стоящей на первом месте $\tilde{\omega}^1$ заменой $\tilde{\omega}^1$ на $\tilde{\omega}^2$, т. е. нечётной перестановкой. Итак, после свёртки с ξ эти члены дадут $-\tilde{\omega}^2(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^3 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$. Аналогично рассматриваются свёртки $\tilde{\omega}^3(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^4 \wedge \ldots)$ и т. д. Первые p свёрток как раз и есть $\tilde{\beta}(\xi) \wedge \tilde{\alpha}$, поскольку в них входят лишь один-формы из $\tilde{\beta}$.

Оставшиеся q свёрток суть, с точностью до (общего) знака, зависящего от степени $\tilde{\beta}$, свёртки один-форм из $\tilde{\alpha}$ с ξ, внешне умноженные слева на $\tilde{\beta}$. Таким образом, первый член такого типа — это $(-1)^p \tilde{\omega}^{p+1}(\xi)(\tilde{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^{p+2} \wedge \ldots \ldots \wedge \tilde{\omega}^{p+q})$, и все остальные тоже имеют вид $(-1)^p$, умноженная на некий член разложения $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}\,(\xi)$.

4.10. В декартовых координатах $\bar{W} = \bar{U} \times \bar{V}$ имеет компоненты $(U^2V^3 - U^3V^2,\ U^3V^1 - U^1V^3,\ U^1V^2 - U^2V^1)$. Для $\omega_{123} = 1$ формула (4.20) принимает вид ${}^*(\bar{U} \times \bar{V})_{12} = (\bar{U} \times \bar{V})^3$ и т. д., что и доказывает равенство (4.22).

4.11. (a) Правая часть равенства, следующего за (4.35), есть сумма $(p+1)!$ слагаемых. На следующей строке сначала выписаны $p!$ слагаемых, у которых нижний индекс i идет первым. Дальше идёт взятая с правильным знаком сумма $p!$ членов, имеющих первым нижним индексом m. Последняя строка получается после суммирования по i $(\delta^i{}_i = n)$.

(b) Чтоб перейти от n-дельты к p-дельте, применим (4.36) $n-p$ раз и получим множитель $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-p)$, требуемый в (4.37).

4.12. (a) Ключевой пункт: $\varepsilon_{ij \ldots k} A^{1i} A^{2j} \ldots A^{nk} = A^{11}\left(\varepsilon_{1j \ldots k} A^{2j} \ldots A^{nk}\right) + A^{12}\left(\varepsilon_{2j \ldots k} A^{2j} \ldots A^{nk}\right) + \ldots = A^{11}\left(\varepsilon_{\alpha \ldots \beta} A^{2\alpha} \ldots A^{n\beta}\right) - A^{12}\left(\varepsilon_{\alpha \ldots \beta} A^{2\alpha} \ldots A^{n\beta}\right) + - \ldots$, причём в последней строчке греческие индексы принимают лишь $n-1$ значений: в первой сумме пропускается 1, во второй 2 и т. д. Как следует из (4.39), p-й член в разложении — это определитель матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$, полученный исключением первой строки и p-го столбца из исходной матрицы.

(b) Правая часть (4.39), очевидно, меняет знак при взаимной замене индексов 1 и 2; отсюда можно вывести требуемое равенство.

4.13. Пусть $\Lambda^i{}_{j'}$ — матрица преобразований базисных один-форм: $\tilde{\omega}^i = \Lambda^i{}_{j'} \tilde{d}x^{j'}$. Тогда $\tilde{\omega} = \Lambda^1{}_{j'} \ldots \Lambda^n{}_{k'} \tilde{d}x^{j'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{k'} = \Lambda^1{}_{j'} \ldots \Lambda^n{}_{k'} \varepsilon^{j' \ldots k'} \tilde{d}x^{1'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'} = \det(\Lambda)\, \tilde{d}x^{1'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'}$. Но закон преобразования метрики имеет вид $g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'} \Lambda^l{}_{j'} g_{kl}$; если взять определитель от обеих частей этого матричного равенства, то мы получим $\det(g_{i'j'}) = [\det(\Lambda)]^2 \det(g_{ij})$. (Заметим, что, как следует из упр. 4.12(b), определители матрицы и её транспонированной совпадают.) Далее, поскольку исходный базис был ортонормированным, то $\det(g_{ij} = \pm 1)$, откуда следует, что $\det(\Lambda) = |\det(g_{i'j'})|^{1/2}$, чем требуемый результат и доказан.

4.14. (a) Это частный случай свойства (2), когда $\tilde{\alpha}$ есть нуль-форма f; $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}g$ «исчезает» по свойству (3).

(b) Это очевидно.

4.15. $V^{i'}{}_{,k'} = \Lambda^{j}{}_{k'}(\Lambda^{i'}{}_{l}V^{l})_{,j} = \Lambda^{j}{}_{k'}\Lambda^{i'}{}_{l}V^{l}{}_{,j} + \Lambda^{j}{}_{k'}\Lambda^{i'}{}_{l,j}V^{l}$. Второй член преобразуется не по тензорному закону. Далее, в $[\bar{U}, \bar{V}]^{i'}$ два «неправильных» члена дают $U^{j}V^{l}\Lambda^{i'}{}_{l,j} - V^{j}U^{l}\Lambda^{i'}{}_{l,j}$. Эта сумма равна нулю, поскольку $\Lambda^{i'}{}_{l,j} = \Lambda^{i'}{}_{j,l} = \partial^2 x^{i'}/\partial x^j \partial x^l$.

4.16. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = {}^*\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\mathrm{d}}f) = {}^*(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}f) = 0.$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\tilde{a}) = \tilde{\mathrm{d}}^*({}^*\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a}) = \tilde{\mathrm{d}}({}^{**}\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a}) = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a} = 0.$$

4.17. Первое выражение в (4.64) — это $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = 0$, записанное в компонентах. Следующий шаг делается так же, как в упр. 4.11(a). Второй член в правой части (4.64) получается из первого заменой j на l, это приводит к изменению знака и показывает, что эти члены равны.

4.18. $\operatorname{div}(\tilde{a}) = \tilde{\mathrm{d}}{}^*\tilde{a} = 0 \Rightarrow {}^*\tilde{a} = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{b}$ при некотором $\tilde{b} \Rightarrow \tilde{a} = {}^*\tilde{\mathrm{d}}\tilde{b} = \operatorname{rot}(\tilde{b})$.

$$\operatorname{rot}(\tilde{a}) = {}^*\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathrm{d}}\tilde{a} = 0 \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{\mathrm{d}}f = \operatorname{gra\tilde{d}}(f).$$

4.19. Выберите векторный базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$, такой что $(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ касательны к ∂U: $\tilde{n}(\bar{e}_p) = 0$ при $2 \leqslant p \leqslant n$. Это значит, что $\tilde{n}(\bar{e}_1) \neq 0$, поскольку у $\tilde{n}$ должна быть по крайней мере одна ненулевая компонента. Так как $\tilde{\omega}$ — n-форма, то у неё всего одна независимая компонента, равная $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = (\tilde{n} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$. Единственный ненулевой член здесь отвечает свёртке $\tilde{n}$ с $\bar{e}_1$, поэтому мы получаем $\tilde{n}(\bar{e}_1)\tilde{\alpha}(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$. Но $\tilde{\alpha}(\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ — это единственная компонента $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ в этом базисе, и, следовательно, она равна $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)/\tilde{n}(\bar{e}_1)$. Сама по себе $\tilde{\alpha}$ задается неоднозначно: при любой функции f форма $\tilde{\alpha} + f\tilde{n}$ так же хорошо подходит. Далее, единственное условие на форму $\tilde{n}$ — это её ортогональность к ∂U. Это значит, что в нашем базисе $\tilde{n}$ имеет компоненты $(n^1, 0, \ldots, 0)$, и очевидно, что для любых двух $\tilde{n}$ и $\tilde{n}'$ мы имеем $\tilde{n} = f\tilde{n}'$. Но из предыдущего рассмотрения следует, что $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ переходит при этом в $f^{-1}\tilde{\alpha}|_{\partial U}$, следовательно, $\tilde{n}(\xi)\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ не меняется.

4.20. Действуя так же, как в случае (4.76), находим

$$\tilde{d}[\tilde{\omega}(\xi)] = (f\xi^i)_{,i}x\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n = f^{-1}(f\xi^i)_{,i}\tilde{\omega}.$$

4.21. Используя упр. (4.13), покажите, что метрика в сферических координатах задаётся матрицей $\operatorname{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$. Тогда выражение для $\operatorname{div}\tilde{\xi}$ получается, если положить $f = r^2\sin\theta$ в (4.80).

4.22. Из (4.67) следует, что $\pounds_{\bar{V}}(\rho\tilde{\omega}) = \tilde{d}[\rho\tilde{\omega}(\bar{V})] = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\rho\bar{V})] = \operatorname{div}(\rho\bar{V})\,\tilde{\omega}$.

4.23. (a) Поскольку $\tilde{\omega}(\xi) = {}^*\xi$, дуализация (4.77) прямо даёт (4.81).

(b) ${}^*\mathsf{F}$ — это $(n-p)$-форма, $d^*\mathsf{F}$ — это $(n-p+1)$-форма, следовательно, ${}^*d^*\mathsf{F}$ — это $(p-1)$-вектор. Равенство (4.83) доказывается простым обобщением (4.76).

(c) $(\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathsf{F})^{i\,\dots\,j} = f^{-1}\left(fF^{ki\,\dots\,j}\right)_{,k}$.

4.24. (a) Если $\tilde{\omega} = \tilde{d}\tilde{a}$, то $\int\tilde{\omega} = \oint\tilde{a}$, но последний интеграл равен нулю, поскольку границы нет.

(b) $\tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ — это обычная форма объёма, поэтому если B — единичный шар (внутренность S^2 в R^3), то $\int_B \tilde{d}\tilde{\omega} =$ объём шара $= 4\pi/3$. По теореме Стокса $\int_B \tilde{d}\tilde{\omega} = \int_{S^2}\tilde{\omega}\,|_{S^2}$. Далее, любая два-форма на двумерном многообразии замкнута, поскольку все три-формы тождественно равны нулю. Таким образом, $\tilde{\omega}$ замкнута, но (a) для неё не выполнено, следовательно, она не точна.

(c) Нам дана форма $\tilde{\beta}$, определённая всюду на S^2, такая что $\tilde{d}\tilde{\beta} = 0$. Проинтегрировав $\tilde{d}\tilde{\beta}$ по любой области на сфере S^2, ограниченной замкнутой кривой $\mathscr{C}$, мы находим, что $\oint_{\mathscr{C}}\tilde{\beta} = 0$ для любой $\mathscr{C}$. Это может иметь место, только если $\tilde{\beta} = \tilde{d}f$; в противном случае нашлась бы кривая $\mathscr{C}$, по которой $\tilde{\beta}$ имела бы ненулевой интеграл. На самом деле f легко строится явно: положим f в некоторой точке P равным произвольному числу f_0, в любой же другой точке Q положим $f(Q) = f_0 + \int\tilde{\beta}$, где интеграл берётся по произвольной кривой, соединяющей P и Q. Условие $\oint\tilde{\beta} = 0$ гарантирует, что $f(Q)$ не зависит от выбора кривой.

4.25. (a) Свойство (i) и (ii) тривиальны. В случае (iii) положим $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} = \tilde{d}\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\beta} - \tilde{\gamma} = \tilde{d}\tilde{\mu}_2$; тогда $\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma} = \tilde{d}(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2)$.

(b) Докажите сначала, что если $\tilde{\beta}_1 \approx \tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\beta}_2 \approx \tilde{\alpha}_2$, то $a\tilde{\beta}_1 + b\tilde{\beta}_2 \approx a\tilde{\alpha}_1 + b\tilde{\alpha}_2$ для любых вещественных чисел a, b. Это просто, поскольку существуют $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$, такие, что $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{d}\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\alpha}_2 + \tilde{d}\tilde{\mu}_2 \Rightarrow a\tilde{\beta}_1 + b\tilde{\beta}_2 = a\tilde{\alpha}_1 + b\tilde{\alpha}_2 + \tilde{d}(a\tilde{\mu}_1 + b\tilde{\mu}_2)$. Итак, мы можем самосогласованно определить линейную комбинацию aA_1+bA_2 классов эквивалентности A_1 и A_2 как класс эквивалентности, порождённый той же линейной комбинацией любых двух элементов из этих классов. Теперь можно смотреть на классы эквивалентности как на векторы из векторного пространства: нулём будет класс нулевого вектора из Z^p, противоположным классу A — класс $-A$, и т. д.

(c) Возьмём вектор вида $(0, b)$ в R^2. Что входит в его класс эквивалентности? Это все векторы $(0, b)+(a, 0)$ с произвольным a и заданным b. Геометрическое место точек, в которых кончаются эти векторы, есть прямая, параллельная оси x и удалённая от неё на расстояние b. В этом смысле мы можем отождествить пространство классов эквивалентности с конгруэнцией таких линий.

4.26. Указанное векторное поле нигде не может обращаться в нуль, поскольку у нашего отображения нет ни одной неподвижной точки: неподвижная точка соответствовала бы блоку $(+1)$ в канонической форме T, но таких блоков там нет. Заметьте, что решающим здесь является факт нечётной размерности сферы.

4.27. (a) Это тривиально.

(b) $H^{n-1}(S^{n-1})$ — это одномерное векторное пространство (R^1), поэтому два любых класса эквивалентности кратны друг другу. Поскольку $\tilde{\omega}$ не точна, она принадлежит ненулевому классу эквивалентности. Из упр. 4.25(b) следует, что в любом классе найдется элемент кратный $\tilde{\omega}$, поэтому для любой формы $\tilde{\alpha}$ существует число a, такое что форма $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}\approx 0$, т. е. точна. Проинтегрировав по S^{n-1}, получим значение a.

(c) Если $\tilde{\alpha}-a\tilde{\omega}=\tilde{d}\tilde{\beta}$, то $\tilde{\beta}$ — это $(n-2)$-форма. Обозначим через $\bar{V}$ вектор, дуальный к ней относительно $\tilde{\omega}: \bar{V}={}^*\tilde{\beta}$, или $\tilde{\beta}=(-1)^n\,{}^*\bar{V}$. Тогда $\tilde{d}\tilde{\beta}=(-1)^n(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\,\tilde{\omega}$. Если f — функция, дуальная к $\tilde{\alpha}$, то мы получаем $(f-a)\,\tilde{\omega}=(-1)^n(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V})\,\tilde{\omega}$. Эта формула равносильна доказываемой.

(d) В этом случае $\tilde{\omega}=x\tilde{d}y-y\tilde{d}x=\tilde{d}\theta$ на единичной окружности, где θ — полярный угол. Любую другую один-форму $\tilde{\alpha}$ можно записать как $g(\theta)\,\tilde{d}\theta$, и, следовательно, нам надо найти функцию $f(\theta)$, такую что $\tilde{d}f=[g(\theta)-a]\,\tilde{d}\theta$ всюду. Поскольку $\tilde{d}f=(df/d\theta)\,\tilde{d}\theta$, то f есть решение уравнения $df/d\theta=g(\theta)-a$, т.е. $f=\int g\,d\theta-a\theta$. Чтоб f была непрерывна, потребуем, чтобы $f(0)=f(2\pi)$, или, что равносильно, $2\pi a=\int_0^{2\pi} g\,d\theta$. Это как раз то условие, которое было получено выше, в пункте (b). Обращая рассуждения того пункта, мы можем заключить, что $H^1(S^1)=R^1$.

4.28. (a) f строится так же, как в упр. 4.24(c).

(b) Предположим, что M односвязно, и пусть $\tilde{\alpha}$ — произвольное достаточно гладкое поле один-форм на M. Тогда $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha}$ гладко меняется при стягивании кривой $\mathscr{C}$. Но $\mathscr{C}$ всегда можно сделать достаточно малой, чтоб она оказалось внутри области, в которой справедлива лемма Пуанкаре (§ 4.19), т. е. $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$. По непрерывности (объединяем несколько малых кривых в одну большую) отсюда следует, что $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$ для любой замкнутой кривой $\mathscr{C}$. Тогда из (a) следует, что $H^1(M) = 0$. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Если $H^1(M) \neq 0$, то существует замкнутая один-форма $\tilde{\alpha}$, которая не точна. Из пункта (a) вытекает, что существует по крайней мере одна замкнутая кривая $\mathscr{C}$ в M, на которой $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} \neq 0$. Если эту кривую можно гладко стянуть в точку, то для всех достаточно малых её «стягиваний» $\mathscr{C}'$ мы получим $\int_{\mathscr{C}'} \tilde{\alpha} = 0$. Рассуждая, как раньше, приходим к противоречию: $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$. Следовательно, $\mathscr{C}$ сжаться в точку не может.

4.29. Все линейные комбинации векторов $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ и только они аннулируются каждой из один-форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$, поэтому полные идеалы этого набора и исходного совпадают. Пусть $\tilde{\beta}$ — q-форма, аннулирующая каждый вектор из X_p; разложим её по базису один-форм. Каждый член разложения будет внешним произведением q один-форм, причём он должен содержать хотя бы одну из форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$. В противном случае этот член не будет аннулировать все векторы из X_p. Такое разложение $\tilde{\beta}$ можно записать, как указано в упражнении.

4.30. Как в упр. 4.29, разложим $\tilde{\gamma}$ по базису один-форм $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$. Если $\tilde{\gamma}$ принадлежит указанному идеалу, то в каждом члене разложения есть по крайней мере одна из форм $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m\}$ и потому (4.90) выполнено. Обратно, если $\tilde{\gamma}$ — q-форма ($q \leqslant n - m$), удовлетворяющая (4.90), рассмотрим набор векторов $\{\bar{x}, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{m+q}\}$, где $\bar{x}$ принадлежит аннулятору X_p форм $\tilde{\alpha}_j$, а $\bar{y}_i$ нет. Пусть $(m+q)$-форма из (4.90) действует на этот набор. Нетривиальные члены будут получаться лишь тогда, когда $\bar{x}$ будет аргументом $\tilde{\gamma}$. Если (4.90) выполнено и в этом случае (при произвольных $\bar{y}_i$), то $\gamma(\bar{x}) = 0$ для любого x из X_p. Это и значит, что $\tilde{\gamma}$ принадлежит нашему полному идеалу. Остаётся рассмотреть случай $q + m > n$, когда (4.90) превращается в тождество. Но тогда разложение $\tilde{\gamma}$ по выбранному базису будет содержать хотя бы одну $\tilde{\alpha}_j$ в каждом слагаемом и, следовательно, $\tilde{\gamma}$ принадлежит идеалу.

4.31. (а) Пусть $\tilde{\beta}$ принадлежит полному идеалу набора $\{\tilde{\alpha}_i\}$. Тогда существуют $\{\tilde{\gamma}^i\}$, такие, что $\tilde{\beta}=\sum \tilde{\gamma}^i \wedge \tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}=$ $=\sum (\tilde{d}\tilde{\gamma}^j \wedge \tilde{\alpha}_j + \tilde{\gamma}^j \wedge \tilde{d}\tilde{\alpha}_j)$. Первое слагаемое лежит в идеале; то же верно и для второго, поскольку $\tilde{d}\tilde{\alpha}_j$ можно представить как $\sum \tilde{\mu}^k \wedge \tilde{\alpha}_k$.

(b) Используйте (4.90) и то, что p-формы при $p > n$ тождественно равны нулю.

4.32. (b) У каждой кривой, удовлетворяющей условиям $U=$ const, $V=$ const касательный вектор аннулирует $\tilde{d}U$ и $\tilde{d}V$, а следовательно и $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, а потому лежит в $\mathscr{H}$.

(c) Используйте критерий (4.90), чтобы определить, при каких условиях $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}$ принадлежат указанному идеалу. Это потребует сложных вычислений, в которых будет полезно данное в задаче указание. Имеем, например, $\tilde{B} \wedge \tilde{d}\tilde{A}=0$. В результате можем записать $\tilde{d}\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}=\tilde{d}f \wedge \tilde{d}g \wedge$ $[-(\tilde{d}\tilde{C}+\tilde{A}\wedge\tilde{C}+\tilde{B}\wedge\tilde{F})+f(\tilde{d}\tilde{A}+\tilde{B}\wedge\tilde{E})+g(\tilde{d}\tilde{B}+\tilde{A}\wedge\tilde{B}+$ $+\tilde{B}\wedge\tilde{D})]$. Это выражение должно обращаться в нуль всюду на многообразии. Член в квадратных скобках пропорционален форме $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$, не зависящей от $\tilde{d}f \wedge \tilde{d}g$, поэтому он должен обращаться в нуль. Поскольку A, B и т. д. от f и g не зависят, он обращается в нуль тогда и только тогда, когда в нуль обращается каждое из трех его слагаемых. Отсюда получаем три первых условия. Остальные получаются из $\tilde{d}\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}=0$.

(d) Вынесите $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$ из каждого члена.

4.33. $\tilde{d}\tilde{\gamma}=\omega^2(\tilde{d}x \wedge \tilde{\alpha}+x\tilde{d}\tilde{\alpha})+\tilde{d}y\wedge\tilde{\beta}+y\tilde{d}\tilde{\beta}=-\omega^2 y\,\tilde{d}x\wedge\tilde{d}t-$ $\omega^2 x\,\tilde{d}y\wedge\tilde{d}t+\omega^2 x\,\tilde{d}y\wedge\tilde{d}t+\omega^2 y\,\tilde{d}x\wedge\tilde{d}t=0.$ Так же легко проверить (4.97).

4.34. Рассмотрим скалярное произведение $(\overline{\nabla}Y_{lm})\cdot({}^*\tilde{d}Y_{lm})=$ $=g_{AB}(g^{AC}Y_{lm,C})(\omega^{DB}Y_{lm,D})=\omega^{DC}Y_{lm,C}Y_{lm,D}$, которое обращается в нуль в силу антисимметричности ω^{DC}. Поскольку метрика положительно-определённа, эти векторы могут быть параллельны, только если они равны нулю, что может быть (при $l\neq 0$) лишь в изолированных точках.

5.1. Вынесите $\tilde{d}S \wedge \tilde{d}T$ и умножьте на P^2.

5.2. (a) $\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = 0 = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{U})]$, поскольку $\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$. Так как фазовое пространство удовлетворяет условиям леммы Пуанкаре (§ 4.19), существует функция H, такая что $\tilde{\omega}(\bar{U}) = \tilde{d}H$, откуда и следуют (5.16).

(b) Используя $[\pounds_{\bar{U}}, \pounds_{\bar{V}}] = \pounds_{[\bar{U}, \bar{V}]}$, покажите, что если $\bar{U}$ и $\bar{V}$ — гамильтоновы векторные поля, то то же верно и для $[\bar{U}, \bar{V}]$. Это и есть скобка в алгебре Ли гамильтоновых векторных полей.

5.3. $\tilde{\omega}$ антисимметрична.

5.4. В компонентах всё получается тривиально.

5.5. Доказывается так же, как равенство $\tilde{\omega}(\bar{U}) = dH$ в упр. 5.2(a).

5.6. (b) Устанавливается прямым вычислением.

(c) Используем (5.32): $\{f, \{g, h\}\} = \bar{X}_f\bar{X}_g(h)$; $\{g, \{h, f\}\} = -\{g, \{f, h\}\} = -\bar{X}_g\bar{X}_f(h)$; $\{h, \{f, g\}\} = \bar{X}_{\{f, g\}}(h)$.

5.7. (b) $\pounds_{\bar{U}}\tilde{\sigma} = 0$, потому что $\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = 0$, но $\pounds_{\bar{U}}\tilde{\sigma} = (\operatorname{div}_{\tilde{\sigma}} \bar{U})\tilde{\sigma}$.

5.8. Очевидно, что $\pounds_{\bar{X}_f} H = 0$, и, поскольку у $\bar{X}_f$ нет импульсных компонент, $\partial f/\partial x^i = 0$ и $\partial f/\partial P_i = -U^i$. Итак, $f = -U^iP_i$.

5.9. Используйте преобразование

$$(\Lambda^{i'}{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.10. (a) Три-форма в четырёхмерном пространстве имеет C независимых компонент.

(b) Например: $F_{[xy,z]} = 0 \Rightarrow F_{xy,z} + F_{zx,y} + F_{yz,x} = 0 = B_{z,z} + B_{y,y} + B_{x,x}$. Это — (5.52c).

5.11. Перемножьте матрицы.

5.12. Например: $F^{tv}{}_{,v} = F^{tx}{}_{,x} + F^{ty}{}_{,y} + F^{tz}{}_{,z} = E_{x,x} + E_{y,y} + E_{z,z}$. Это даёт (5.52d).

5.13. (a) $({}^*\tilde{F})_{tx} = \frac{1}{2}(\omega_{yztx}F^{yz} + \omega_{zytx}F^{zy}) = F^{yz} = B_x$.

$$({}^*\tilde{F})_{xy} = \frac{1}{2}(\omega_{tzxy}F^{tz} + \omega_{ztxy}F^{zt}) = F^{tz} = E_z.$$

Искомая матрица совпадает с (5.53), если $B_i \to E_i$, $E_i \to -B_i$.

(b) Это следует из упр. 4.23.

5.14. (a) Покажите, что первое уравнение даёт $\nabla\cdot\mathbf{B} = 4\pi\rho_m$, и т. д.

(b) $\tilde{d}\tilde{d}^*\tilde{F} = 0 \Rightarrow \tilde{d}^*\tilde{J} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{J})] = (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{J})\,\tilde{\omega}$.

5.15. (a) Это легко доказывается в компонентах.

(b) Поскольку для интегрирования нужно взять ограничение на $\mathcal{H}$, то $^*J$ выступает как три-форма.

(c) Ограничение $^*J$ на $\mathcal{H}$ — это $J^t\,\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$. Ограничение F на $\partial\mathcal{D}$ (поверхность с постоянными t и r) — это $^*F_{\theta\varphi}\,\tilde{d}\theta\wedge\tilde{d}\varphi$. Однако $^*F_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}(\omega_{tr\theta\varphi}F^{tr} + \omega_{zt\theta\varphi}F^{rt}) = r^2\sin\theta E_r$. (Вспомните равенство (4.40) и упр. 4.21.) Таким образом, в обычных обозначениях интеграл принимает вид $\int \rho d^3x =$ $= \oint E_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

5.16. (a) Рассмотрите, например, (t, x)-компоненту (5.64): $F_{tx} = A_{x,t} - A_{t,x}$. Сравните это с обычным определением: $E_x = \varphi_{,x} + A_{x,t}$. Поскольку $F_{tx} = -E_x$, то всё отсюда и следует. С остальными уравнениями это совместно.

(b) $\varphi \to \varphi + f_{,t}$; $A^i \to A^i + \nabla_i f$.

(c) Для статического заряда q в начале координат все компоненты $\mathbf{B}$ равны нулю, а $\mathbf{E} = qr^{-2}e_r$. Отлична от нуля лишь компонента $(^*F)_{\theta\varphi}$, равная (как в упр. 5.15) $q\sin\theta$. Отсюда $\alpha_{\varphi,\theta} - \alpha_{\theta,\varphi} = q\sin\theta$. Возможны два решения: $\{\alpha_\varphi = -q\cos\theta,\ \alpha_\theta = \alpha_t = \alpha_r = 0\}$ и $\{\alpha_\theta = -q\varphi\sin\theta,\ \alpha_\varphi = \alpha_t = \alpha_r = 0\}$. Они отличаются друг от друга на калибровочное преобразование и оба обращают в нуль все остальные компоненты $\tilde{d}\tilde{\alpha}$. Но ни одно не задаёт корректно определённой один-формы: первое не определено в полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, второе многозначно.

5.17. Это очевидно.

5.18. $(\pounds_{\bar{U}}\bar{W})^i = [\bar{U}, \bar{W}]^i = U^j W^i{}_{,j} - W^i{}_{,j} = U^t W^i{}_{,t} + U^\alpha W^i{}_{,\alpha} - W^\alpha U^i{}_{,\alpha}$, где сумма по α берётся только по (x, y, z). Ответ следует из того, что $U^t = 1$ и $U^t{}_{,\alpha} = 0$.

5.19. Ответ следует из того, что $\Lambda^{t'}{}_x = \partial t'/\partial x = 0$, $\Lambda^t{}_{x'} = = \partial t/\partial x' = 0$.

5.20. $dp = (\partial p/\partial\rho)d\rho + (\partial p/\partial S)dS$. Это обращает (5.77) в нуль, поскольку $\mathrm{d}S\wedge\mathrm{d}S = 0 = \mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\rho$.

5.21. Возьмите дуализацию (5.80), как в (5.82), и найдите компоненты.

5.22. Воспользовавшись (3.37) в декартовых координатах, покажите, что (5.85) и (5.86) принимают нужный вид. Поскольку это тензорные равенства, то, будучи верны в одной координатной системе, они верны и во всех системах.

5.23. В группе изометрии, $SO(3)$, очевидно, имеются элементы, переводящие любую точку сферы в любую другую точку: просто проводим через эти точки большой круг и выполняем поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости круга. Поэтому S^2 однородна. Группа изотропии точки P состоит из всех вращений, оставляющих P неподвижной. Очевидно, что они образуют подгруппу $SO(2)$ в $SO(3)$, следовательно, S^2 изотропна.

5.24. (a) Поскольку V^i должны обращаться в нуль в точке P (группа изотропии оставляет P неподвижной), их разложение Тэйлора имеет вид (5.96) с некоторыми матрицами $A^i{}_j$. Из (5.89), учитывая, что в наших координатах $\Gamma^l{}_{ij} = 0$ и нет разницы между верхними и нижними индексами, мы получаем условие (5.97): $A^i{}_j + A^j{}_i = 0$.

(b) (5.98) получается простым вычислением.

(c) Алгебры Ли группы изотропии и группы $SO(m)$ совпадают, следовательно, и сами группы совпадают, по крайней мере в некоторой окрестности единичного элемента. Но у точки P есть малая окрестность, взаимно-однозначно отображающаяся на окрестность начала координат в R^m, а из пункта (a) следует, что их поля Киллинга отображаются друг в друга с точностью до $O(x^2)$. Поэтому их преобразования изотропии можно привести в 1-1-соответствие, и наши группы совпадают.

(d) Если $\mathfrak{g}$ не положительно-определённа, то в нашей системе координат поднятие и опускание индексов может изменить знак. Тогда правильно записанное (5.97) — это $A_{ij} = -A_{ji}$, а не $A^i{}_j = -A^j{}_i$, и алгебра Ли группы изотропии не состоит из антисимметричных матриц.

5.25. (a) Геометрически линии $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ определяются как интегральные кривые поля $\tilde{n}$. Если бы радиальное расстояние между сферами было различно по разным направлениям, то многообразие не было бы изотропным. Поэтому g_{rr} не зависит от θ и φ.

(b) Около точки P мы можем построить координаты, как в упр. 2.14, а затем перейти к сферическим координатам таким же преобразованием, как в плоском пространстве. Эти новые координаты совпадают (при $z \to 0$) с координатами в (5.100), поскольку площадь поверхности сфер определяет r. Таким образом, (5.102) выполнено.

5.26. Доказывается прямым вычислением.

5.27. Они соответствуют $\zeta_{1m} = \text{const}$. Легко видеть, что норма такого вектора стремится к нулю при $r \to 0$, следовательно, он принадлежит алгебре Ли группы изотропии. Рассматриваемая группа изотропии, $SO(3)$, трёхмерна, и множество всех векторов Киллинга, порождённых тремя константами ζ_{1m}, тоже трёхмерно, поэтому такими векторами исчерпывается вся группа изотропии.

5.82. Перейдите к декартовым координатам или вычислите норму вектора с $V_m = 1$ и $\zeta_{1m} = 0$.

5.29. Очевидно, что $f = 1 \Rightarrow S$ есть E^3. Далее, $\partial/\partial x = \cos\varphi \sin\theta \partial/\partial r + r^{-1}\cos\varphi\cos\theta\partial/\partial\theta - r^{-1}\sin\varphi\cos\theta\,\partial/\partial\varphi$ — это вектор Киллинга, порождённый $V_1 = V_{-1} = (2\pi/3)^{1/2}$, $\zeta_{1m} = 0$.

5.30. Из вторых и третьих диагональных компонент матриц (5.119) мы получаем $r = \sin\chi/\sqrt{K}$ и $r = \operatorname{sh}\chi/\sqrt{K}$ соответственно. Остаётся проверить, что первая диагональная компонента получится, какая надо. Например, в случае $K > 0$: $g_{\chi\chi} = g_{rr}(\partial r/\partial\chi)^2 = (1 - Kr^2)^{-1}\cos^2\chi/K = 1/K$, как и требовалось.

5.31. $w = r\cos\chi$, $x = r\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\chi\cos\theta$. Тогда, например, $g_{\theta\theta} = (\partial w/\partial\theta)^2 + (\partial x/\partial\theta)^2 + (\partial y/\partial\theta)^2 + (\partial z/\partial\theta)^2 = r^2\sin\chi$. Для полного совпадения остаётся положить $r^2 = K^{-1}$.

5.32. (a) Центральный пункт состоит в том, что при $K < 0$ площадь/4π(радиальное расстояние)$^2 = \operatorname{sh}^2\chi/\chi^2 > 1$. Рассмотрим сферу в подмногообразии пространства E^n. Вследствие положительности метрики в E^n расстояние от центра сферы до её поверхности вдоль кривой в любом подмногообразии E^n всегда больше, чем «настоящий» радиус сферы. Поэтому для любого сферически симметричного подмногообразия в E^n площадь/4π(радиальное расстояние)$^2 \leqslant 1$. Таким образом, открытая Вселенная не может быть «погружена» ни в какое эвклидово пространство с сохранением метрики. Это верно даже тогда, когда открытая Вселенная имеет положительно-определённую метрику!

(b) Рассмотрим гиперболоид $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = K^{-1}$ (< 0) в пространстве Минковского. Зададим обычные сферические координаты: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; тогда это подмногообразие задается как $t = (r^2 - K^{-1})^{1/2}$. Компоненты метрического тензора будут $g_{rr} = -(\partial t/\partial r)^2 + (\partial x/\partial r)^2 + (\partial y/\partial r)^2 + (\partial z/\partial r)^2 = (1 - Kr^2)^{-1}$. Аналогично $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$. Таким образом, гиперболоид изометричен открытой Вселенной.

6.1. Воспользуйтесь определением тензора.

6.2. Прямой подсчет по (6.6) с учётом $\bar{e}_{l'} = \Lambda^m{}_{l'}\bar{e}_m$.

6.3. Тривиально.

6.4. Базисный вектор $\bar{e}_\theta$ на рис. 6.1 не меняется при переносе по направлению θ: $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\theta = 0$. Поэтому мы получаем из (6.6): $\Gamma^\varphi{}_{\theta\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0$. Представим, что вектор в точке D на рис. 6.2 это $\bar{e}_\varphi$. Тогда при переносе по направлению θ будет оставаться неизменным лишь его направление, но не длина, поскольку при приближении к полюсам $\bar{e}_\varphi \to 0$ в отличие от переносимого вектора. А именно, $|\bar{e}_\varphi| = \sin\theta$, и мы получаем $\bar{e}_\varphi(\theta + \delta\theta) - \bar{e}_\varphi(\theta) = \bar{e}_\varphi(\theta)\,[\delta(\sin\theta)/\sin\theta]$, или $\nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_\varphi = \operatorname{ctg}\theta\,\bar{e}_\varphi$, т. е. $\Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta$, $\Gamma^\theta{}_{\varphi\theta} = 0$. Соответствующие производные по направлению $\bar{e}_\varphi$ вычислить труднее, поскольку кривые $\theta = \mathrm{const}$ не являются большими кругами. Рассмотрим точку P: $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$. На рис. П. 1 мы изобразили окрестность P так, как её видит стоящий в этой точке наблюдатель. Линия $\theta = \theta_0$, проходящая через P, — это кривая, касающаяся большого круга, который выглядит на рисунке как прямая линия. Рассмотрим точку Q с $\varphi = \delta\varphi \ll 1$ на круге $\theta = \theta_0$. Чтоб вычислить, скажем, $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\varphi$ в P, нам нужна разность $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{e}_\varphi(P)$ с точностью до первого порядка по $\delta\varphi$. Поскольку наши координаты не декартовы, то мы не можем просто взять разность компонент векторов в двух разных точках. Вместо этого мы зададим на большом круге векторное поле $\bar{V}$, перенеся $\bar{e}_\varphi(P)$ вдоль него параллельно, т. е. сохраняя вектор касательным и не меняя его длины. Точка R с координатой $\varphi = \delta\varphi$ очень близка к Q, расстояние между ними порядка $O(\delta\varphi^2)$. Поэтому с точностью до первого порядка мы можем взять за основу вектор $\bar{V}(R)$ и аппроксимировать $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{e}_\varphi(P)$ разностью $\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{V}(R)$, которую мы уже *можем* вычислять, просто взяв разность компонент. Итак, в наших координатах $\bar{e}_\varphi$ всюду имеет компоненты $(0, 1)$. Найдём $\bar{V}$. Большой круг — это пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плоскостью $x = z \operatorname{tg}\theta_0$. Поэтому в сферических координатах уравнением большого круга будет $\sin\theta = \sin\theta_0(1 - \cos^2\theta_0 \sin^2\varphi)^{1/2}$. Считая φ параметром, находим касательный вектор $(d\theta/d\varphi, 1) = (\sin\theta_0 \cos\theta_0 \sin\varphi/(1 - \cos^2\theta_0 \sin^2\varphi), 1)$. При $\varphi = 0$ (точка P) он равен $\bar{e}_\varphi(P)$, а при $\varphi = \delta\varphi$ (точка R) это будет $(\sin\theta_0 \cos\theta_0 \delta\varphi, 1)$, с точностью до первого порядка. С той же точностью он имеет ту же длину, что и $\bar{e}_\varphi(P)$, значит, это на самом деле вектор $\bar{V}(R)$. Таким образом, мы получаем $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\varphi = \lim_{\delta\varphi\to 0}(\bar{e}_\varphi(Q) - \bar{V}(R))/\delta\varphi = (-\sin\theta_0\cos\theta_0, 0)$. Отсюда

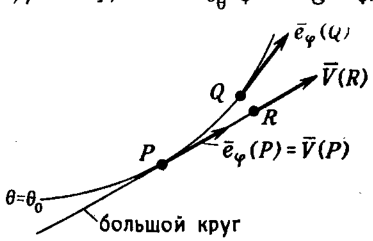

Рис. П.1.

следует, что $\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi} = 0$. Аналогичные вычисления для $\nabla_{\bar{e}_\varphi}\bar{e}_\theta$ дают $\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta$, $\Gamma^{\theta}{}_{\theta\varphi} = 0$.

6.5. $\langle\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle = \delta^j{}_k \Rightarrow \langle\nabla_i\tilde{\omega}^j, \bar{e}_k\rangle = -\langle\tilde{\omega}^j, \nabla_i\bar{e}_k\rangle = -\Gamma^j{}_{ki}$. Таким образом, $\nabla_i\tilde{\omega}^j$ — это один-форма, k-я компонента которой равна $-\Gamma^j{}_{ki}$, как и требуется в (6.8).

6.6. Используйте упр. 6.5 и действуйте так же, как при выводе равенства (6.10).

6.7. Действуйте, как в предыдущем упражнении.

6.8. В координатном базисе $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$.

6.9. Надо показать, что $\mathbf{T}$ линеен по своим аргументам. Например, по $\bar{U}$: $\mathbf{T}(\,;\, f\bar{U}, \bar{V}) = \nabla_{f\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}(f\bar{U}) - [f\bar{U}, \bar{V}] = f\left(\nabla_{\bar{U}}\bar{V} - \nabla_{\bar{V}}\bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}]\right) - \bar{U}\nabla_{\bar{V}}(f) + \bar{U}\pounds_{\bar{V}}(f)$. Члены с производными от f сокращаются, следовательно, $\mathbf{T}$ действительно линеен по этому аргументу.

6.10. Доказательство аналогично доказательству упр. 6.9.

6.11. Достаточно показать это для скаляров (где оба значка означают одно и то же) и векторов (что составляет содержание (6.13)). Поскольку оба правила дифференцирования обобщаются на тензоры старшего ранга с помощью (6.3), мы получаем ответ для всех тензоров.

6.12. Очевидно.

6.13. Доказывается прямым вычислением.

6.14. (a) В координатном базисе $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$, $\nabla_i\nabla_j\bar{e}_k = \nabla_i\Gamma^l{}_{kj}\bar{e}_l = \Gamma^l{}_{kj,i}\bar{e}_l + \Gamma^l{}_{kj}\nabla_i\bar{e}_l = \Gamma^l{}_{kj,i}\bar{e}_l + \Gamma^l{}_{kj}\Gamma^m{}_{li}\bar{e}_m$. Антисимметризация по i и j и переобозначение индексов приводят к ответу.

(b) Очевидно.

(c) (6.23a) сразу следует из (6.19), но (6.23b) надо доказывать. В нормальных координатах в точке P имеем $\Gamma^l{}_{jk}(P) = 0$; значит, $R^l{}_{kij}(P) = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j}$. Тогда $3R^l{}_{[kij]} = \Gamma^l{}_{kj,i} - \Gamma^l{}_{ki,j} + \Gamma^l{}_{ik,j} - \Gamma^l{}_{jk,i} + \Gamma^l{}_{ji,k} - \Gamma^l{}_{ij,k} = 0$, поскольку $\Gamma^l{}_{jk} = \Gamma^l{}_{kj}$.

(d) То что индексов 4, означает, что мы начинаем с n^4 компонент. Равенства (6.23a) — это $n^2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$ отдельных соотношений, поскольку индексы l и k свободные, а симметричных пар (ij) имеется $\frac{1}{2}n(n+1)$ штук. (Их столько же, сколько независимых компонент у симметричной матрицы размера $n \times n$.) Связи (6.23b) совершенно не зависят от

(6.23а), поскольку в них входят лишь $R^l{}_{k[ij]}$. Всего в этом равенстве $n(n-1)(n-2)/3!$ различных антисимметричных троек (kij); с учётом произвольности l это дает третье слагаемое в (6.24).

6.15. В нормальных координатах в точке P имеем $R^l{}_{kij;m} = R^l{}_{kij,m} = \Gamma^l{}_{kj,im} - \Gamma^l{}_{ki,jm}$; первый член симметричен по (im), второй — по (jm), поэтому в (6.25) оба обращаются в нуль. Связь с тождеством Якоби следует из (6.19).

6.16. (a) $\bar{e}_r = \cos\theta\bar{e}_x + \sin\theta\bar{e}_y$, $\bar{e}_\theta = -r\sin\theta\bar{e}_x + r\cos\theta\bar{e}_y \Rightarrow \nabla_{\bar{e}_\theta}\bar{e}_r = -\sin\theta\bar{e}_x + \cos\theta\bar{e}_y = r^{-1}\bar{e}_\theta \Rightarrow \Gamma^\theta{}_{r\theta} = r^{-1}$, $\Gamma^r{}_{r\theta} = 0$. Другие равенства выводятся так же.

(b) $V^r{}_{;r} = V^r{}_{,r}$; $V^r{}_{;\theta} = V^r{}_{,\theta} - rV^\theta$; $V^\theta{}_{;r} = V^\theta{}_{,r} + V^\theta/r$; $V^\theta{}_{;\theta} = V^\theta{}_{,\theta} + V^r/r$; $V^i{}_{;i} = V^r{}_{,r} + r^{-1}V^r + V^\theta{}_{,\theta} = r^{-1}(rV^r)_{,r} + V^\theta{}_{,\theta}$.

6.17. (a) $(\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega})_{i\ldots k} = \tilde{\omega}_{i\ldots k,l}V^l + \omega_{l\ldots k}V^l{}_{,l} = \omega_{i\ldots k;l}V^l + \omega_{l\ldots k}V^l{}_{;l}$. Поэтому $V^l{}_{;l} = \mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{V}$ при всех $\bar{V}$ тогда и только тогда, когда $\nabla\tilde{\omega} = 0$.

(b) $\omega_{i\ldots k;l} = \omega_{i\ldots k,l} - \Gamma^m{}_{ml}\omega_{i\ldots k} = (f_{,l} - f\Gamma^m{}_{ml})\varepsilon_{i\ldots k}$.

6.18. (a) $\nabla_{\bar{V}}[\mathrm{g}(\bar{A}, \bar{B},)] = (\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A}, \bar{B}) + \mathrm{g}(\nabla_{\bar{V}}\bar{A}, B) + \mathrm{g}(\bar{A}, \nabla_{\bar{V}}\bar{B}) = (\nabla_{\bar{V}}\mathrm{g})(\bar{A}, \bar{B})$. Это равно нулю для всех $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{V}$ тогда и только тогда, когда $\nabla\mathrm{g} = 0$.

(b) Из равенства (6.29) следует, что $g_{ij,k} = \Gamma^l{}_{ik}g_{lj} + \Gamma^l{}_{jk}g_{il}$. Объединив различные g вместе, как в правой части (6.30), получаем нужный ответ.

6.19. Нам надо показать, что из (6.30) следует $\Gamma^i{}_{jk} = (\ln|g|^{1/2})_{,k}$. Это будет нетрудно, если мы докажем, что $g_{,k} = g^{ji}g_{ij,k}$. (Это справедливо для определителя любой матрицы.) Начнем с равенства $g = \varepsilon^{i\ldots k}g_{1i}\ldots g_{nk} = g_{1i}(\varepsilon^{ij\ldots k}g_{2j}\ldots g_{nk})$. Отсюда видно, что если *определить* $g^{i1} = g^{-1}\varepsilon^{ij\ldots k}g_{2j}\ldots g_{nk}$, то мы получим $1 = g_{1i}g^{i1}$. Далее, $g_{2i}g^{i1} = 0$ в силу антисимметричности ε. Таким образом, мы имеем явное выражение для матрицы, обратной к $g_{ij}: g^{ij} = ((n-1)!g)^{-1}\varepsilon^{il\ldots m} \times \varepsilon^{jk\ldots r}g_{lm}\ldots g_{rm}$. Теперь воспользуемся результатом из упр. 4.12(b): $g = \varepsilon^{il\ldots m}\varepsilon^{jk\ldots r}g_{ij}g_{lk}\ldots g_{mr}/n!$ и получим $g_{,a} = n\varepsilon^{il\ldots m}\varepsilon^{jk\ldots r}g_{ij,a}g_{lk}\ldots g_{mr}/n! = g_{ij,a}g^{ji}$. Дальнейшее просто.

6.20. Замените в (3.37) запятые на точки с запятой и используйте равенство $\nabla_i g_{jk} = 0$.

6.21. Доказывается прямым вычислением.

6.22. (b) Просто вычесть из (6.24) число связей, содержащихся в (6.33), нельзя, поскольку среди новых связей не все могут быть независимыми от старых. Вместо этого мы начнём всё заново и займёмся парами индексов. Из (6.23a) следует, что имеется $\frac{1}{2}n(n-1)$ независимых пар, а (6.33) означает, что R есть симметричная матрица в пространстве размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$ и, значит, имеет $\frac{1}{2}[n(n-1)/2][n(n-1)/2+1]=n(n-1)(n^2-n+2)/8$ независимых компонент. Теперь (6.23b) содержит меньше независимых связей, чем раньше. Рассмотрим всевозможные тройки (kij) $(n(n-1)(n-2)/3!$ возможных наборов); будет ли каждый выбор l давать независимую связь? Нет, потому что (6.23a) и (6.33) позволяют провести следующее преобразование: $3R_{l[kij]}=R_{lkij}+R_{ljki}+R_{lijk}=R_{klji}+R_{kilj}+R_{kjil}=3R_{k[lji]}$. Это значит, что новую информацию мы получаем, только если все *четыре* индекса различны, т. е. всего связей будет $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$. Этот ответ совпадает с данным в задаче.

6.23. (a) Это следует из (6.33) и (6.23a).

6.24. Геодезическая задаётся уравнением (6.16a). Из него видно, что $\nabla_{\bar{U}}g(\bar{U},\bar{U})=0$; следовательно, если $g(\bar{U},\bar{U})\neq 0$, то малые вариации пути не изменят знака $g(d\bar{x}/d\lambda, d\bar{x}/d\lambda)$. Сначала займёмся пространственно-подобной геодезической. Из вариационного исчисления известно, что при вариации пути $\delta x^i(\lambda)$ вариация $\delta\int(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{1/2}\,d\lambda$ с точностью до первого порядка равна $-\frac{1}{2}\int\delta x^i(\lambda)(-2d(g_{ij}\dot{X}^j)/d\lambda+g_{jk,i}\dot{X}^j\dot{X}^k)\times$ $\times(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{-1/2}d\lambda=\int\delta x_i(\lambda)(\ddot{X}^i+\Gamma^i{}_{jk}\dot{X}^j\dot{X}^k)(g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j)^{-1/2}\,d\lambda$. (Точки обозначают здесь $d/d\lambda$.) Отсюда следует, что геодезическая является экстремалью. В случае времени-подобной геодезической практически всё то же. В случае нулевой геодезической надо разбить интеграл на части так, чтобы в каждой из них вариация была или времени-подобной, или пространственно-подобной, или нулевой.

6.25. (a) $D_\mu\psi=\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi$; $D_\mu(e^{i\varphi(x)}\psi)=\nabla_\mu(e^{i\varphi}\psi)-i(A_\mu+$ $+\nabla_\mu\varphi)\psi=e^{i\varphi}(\nabla_\mu\psi-iA_\mu\psi)=e^{i\varphi}D_\mu\psi$.

(b) $D_\mu D_\nu\psi=\nabla_\mu\nabla_\nu\psi-iA_\nu\nabla_\mu\psi-i(\nabla_\mu A_\nu)\psi-iA_\mu\nabla_\nu\psi-A_\mu A_\nu\psi$. Поскольку $\nabla_\mu\nabla_\nu\psi=\nabla_\nu\nabla_\mu\psi$, то мы получаем $[D_\mu, D_\nu]\psi=$ $-i(\tilde{d}\tilde{A})\psi$.