

с самого низкого энергетического уровня. При этом могут возбуждаться и вышележащие энергетические уровни, т. е. удаляться электроны с них, так как для этого требуются меньшие энергии. В результате станут возможными переходы между всевозможными энергетическими уровнями, т. е. в спектре излучения появятся всевозможные спектральные серии. Иначе происходит со спектром поглощения. Если водород не излучает, то его атомы находятся в нормальном состоянии, т. е. на самом низком энергетическом уровне. На других уровнях атомов нет. Поэтому при поглощении света возможны только переходы с самого низкого энергетического уровня на более высокие. При таких переходах в спектре поглощения появится только серия Лаймана. Чтобы при поглощении возникли и другие серии, необходимо, чтобы уже до освещения были возбуждены и другие энергетические уровни. Но тогда появится и спектр испускания рассматриваемого газа. Линии поглощения таких серий могут наблюдаться только на фоне спектра испускания газа. Поэтому необходимо, чтобы последние были менее яркими, чем соответствующие линии освещающего излучения. Аналогично ведут себя и спектры других атомов.

5. Совокупность значений энергии стационарных состояний атома $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots$ образует *энергетический спектр атома*. По классической теории излучаемые частоты атома (в простейшем случае одномерного движения) также можно представить в виде ряда v_1, v_2, v_3, \dots , перенумеровав их одним индексом. В этом некоторые авторы видят какое-то противоречие между классической теорией и опытом. Действительно, говорят они, опыт приводит к комбинационному принципу Ритца. Согласно этому принципу и теории Бора каждая частота получается путем комбинации двух термов и должна нумероваться *двумя индексами*, например v_{12}, v_{13}, \dots Первый индекс указывает номер начального, второй — конечного термов. Поэтому частоты должны образовывать не одномерный ряд, а прямоугольную таблицу, или *матрицу*. Такое выражение является недоразумением. Мы указываем на него только потому, что оно действительно встречается и может быть воспринято читателем как действительное, а не фиктивное выражение. На самом деле, как хорошо известно из математики, элементы прямоугольной матрицы образуют либо конечное, либо счетное множество. Их всегда можно перенумеровать с помощью *одного индекса*, даже в том случае, когда число элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы бесконечно велико.

§ 13. Спектр водорода

1. Определение значений энергии атома $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots$ в стационарных состояниях называется *квантованием*, точнее — *квантованием энергии* атома. Бор предложил правило кванто-

вания для водородного атома, приводящее к правильным результатам. Проблема квантования в общем виде была сформулирована в квантовой механике, и притом не только для водородного атома, но и для *любых* атомных систем (см. § 22). Она довольно сложна. Правило квантования Бора представляет только исторический интерес. Тем не менее полезно привести простое решение задачи о квантовании для атома водорода или водородоподобного атома, близко примыкающее к идеям Бора. В основе такого решения лежит аналогия с классической механикой и эмпирически установленное выражение для спектральных термов атома водорода.

Примем, что спектральные термы и соответствующие им уровни энергии атома водорода имеют *бальмеровский вид*:

$$T_n = Z^2 R/n^2, \quad (13.1)$$

$$\mathcal{E}_n = -chT_n = -chZ^2 R/n^2, \quad (13.2)$$

где R — *постоянная Ридберга*, а зарядовое число Z ядра введено ради удобства. Целое число n называется *главным квантовым числом*. С возрастанием n соседние уровни энергии атома сближаются, и при $n \rightarrow \infty$ расстояние между ними стремится к нулю. Дискретность энергетического спектра становится все менее и менее заметной. Поэтому можно ожидать, что в таком предельном случае квантовая система будет вести себя, как классическая. Это положение было выдвинуто Бором и названо им *принципом соответствия*.

Принцип соответствия позволяет выразить постоянную Ридберга R через фундаментальные постоянные, характеризующие атом. Для общности будем рассматривать *водородоподобный атом*. Так называется ион с зарядом ядра $+Ze$, вокруг которого вращается один электрон. При $Z=1$ он переходит в обычный нейтральный атом водорода H , при $Z=2$ — в однократно ионизованный атом гелия He^+ , при $Z=3$ — в дважды ионизованный атом лития Li^{++} и т. д. Разумеется, наше рассуждение будет предполагать справедливость выражения (13.2) и для водородоподобного атома. Однакова ли постоянная Ридберга для различных водородоподобных атомов — это будет выяснено в дальнейшем.

2. Для простоты Бор принял, что электрон вращается вокруг ядра по окружности. Позднее Зоммерфельд (1868—1951) обобщил рассуждения Бора на случай эллиптических орбит. Однако с появлением квантовой механики это обобщение потеряло значение, и мы его рассматривать не будем. Ограничимся более простым случаем круговых орбит. По классическим представлениям частота излучаемого света равна частоте обращения электрона по круговой орбите. Для низких частот это безусловно верно, как показывает сравнение классической теории с опытом

в области радиодиапазона. К таким частотам и относятся приводимые ниже вычисления. Здесь частоты, вычисленные по квантовой и классической теориям, должны совпадать, как этого требует принцип соответствия. Ядро мы будем считать бесконечно тяжелым, а потому неподвижным. При вращении по окружности радиуса r с циклической частотой ω

$$mr^2\omega^2 = Ze^2/r^2, \quad (13.3)$$

откуда $\omega = Ze^2/(Lr)$, где $L = mr^2\omega$ — момент количества движения электрона. Полная энергия электрона слагается из кинетической и потенциальной и равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Следовательно, по классической теории должно быть

$$\omega = -2\mathcal{E}/L. \quad (13.4)$$

С другой стороны, уровни энергии водородоподобного атома должны иметь бальмеровский вид (13.2). Отсюда следует, что при переходах атома с одного уровня на другой величина $\mathcal{E}_n n^2$ должна сохраняться: $\mathcal{E}_n n^2 = \text{const}$. Поэтому при больших квантовых числах n и малых их изменениях Δn должно выполняться соотношение

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_n} + 2 \frac{\Delta n}{n} = 0.$$

Отсюда с учетом правила частот Бора $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega$ получается

$$\omega = -\frac{2\mathcal{E}}{\hbar n} \Delta n, \quad (13.5)$$

причем у \mathcal{E} мы опустили индекс n и считаем $\Delta n > 0$, чтобы не вводить отрицательных частот. Наименьшая частота соответствует переходу $\Delta n = 1$. Это — основная частота. Значениям $\Delta n = 2, 3, \dots$ соответствуют ее гармоники, или обертоны. По принципу соответствия основная частота в формуле (13.5) должна совпадать с классической частотой (13.4). Это возможно только тогда, когда

$$L = n\hbar. \quad (13.6)$$

Значит, по теории Бора момент количества движения, по крайней мере при больших квантовых числах n , квантуется, т. е. может принимать только избранные значения (13.6).

Из формулы (13.3) теперь получаем

$$(mr^2\omega)^2 = Ze^2rm = (n\hbar)^2.$$

Отсюда

$$r = n^2\hbar^2/(Ze^2m), \quad (13.7)$$

а следовательно,

$$\mathcal{E}_n = -Ze^2/2r = -(Ze^2)^2 m/2\hbar^2 n^2. \quad (13.8)$$

Сравнением этой формулы с (13.2) находим

$$R_\infty = \frac{me^4}{4\pi c\hbar^3} = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} = 109\,737,309 \pm 0,12 \text{ см}^{-1}. \quad (13.9)$$

Мы снабдили R индексом ∞ , чтобы указать, что при получении формулы (13.9) масса ядра M считалась бесконечной, а само ядро неподвижным. В этом приближении постоянная Ридберга одинакова для всех водородоподобных атомов.

Теоретическое значение постоянной Ридберга (13.9), хотя и очень близко к экспериментальному значению для атомов водорода $R_H = 109\,677,576 \text{ см}^{-1}$, но при спектроскопической точности измерений их различие все же очень велико. Оно связано с тем, что при выводе формулы (13.9) не учитывалась конечность массы ядра M . Чтобы учесть это, надо массу электрона m заменить на приведенную массу $Mm/(M+m)$. Тогда получится

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m/M}. \quad (13.10)$$

В этом приближении постоянная Ридберга зависит от массы ядра, а потому ее значения для различных водородоподобных атомов отличаются друг от друга, хотя и очень мало. Для атома водорода формула (13.10) дает $R = 109\,677,6 \text{ см}^{-1}$, что хорошо согласуется с экспериментом.

Формула (13.10) может служить для вычисления постоянной Ридберга R_∞ для бесконечно тяжелого ядра. Для этого достаточно воспользоваться спектроскопическим значением R , например, для водорода, а также значением m/M из масс-спектрографических измерений.

3. Формула (13.8) получена для больших значений квантовых чисел n . Но она остается справедливой *при любых значениях* n , так как при ее выводе был постулирован бальмеровский вид термов (13.1), в котором на значения n не наложено никаких ограничений. Наша задача состояла лишь в том, чтобы на основе принципа соответствия получить теоретические формулы (13.9) и (13.10) для постоянных Ридберга R_∞ и R . Но эти постоянные, очевидно, не зависят от n , а потому их значения и можно было получить, проводя вычисления при больших n .

В спектроскопии спектральные термы и уровни энергии принято изображать горизонтальными линиями, а переходы между ними — стрелками. Стрелкам, направленным от высших уровней энергии к низшим, соответствуют линии излучения; стрелкам, проведенным в обратных направлениях, — линии поглощения. В качестве примера на рис. 21 таким путем изображен спектр водорода. Уровни энергии здесь нумеруются квантовым

числом n . За нуль принята энергия уровня с $n = \infty$. Этот уровень изображен верхней горизонтальной пунктирной прямой. Все энергетические уровни, расположенные ниже, дискретны. Им соответствуют отрицательные значения полной энергии атома. Выше пунктирной линии энергия не квантуется, т. е. энергетический спектр непрерывен. Но при $\mathcal{E} < 0$ движение электрона

финитно, а при $\mathcal{E} > 0$ — инфинитно. Это непосредственно следует из соответствующей теоремы классической механики (см. т. I, §§ 25, 57), поскольку при больших n ее можно применять. Соответствующая теорема может быть доказана и в последовательной квантовой механике (см. § 22), т. е. совершенно строго.

Таким образом, ядро и электрон образуют связанную систему — атом — только в случае дискретного энергетического спектра. При непрерывном энергетическом спектре электрон может как угодно далеко удаляться от ядра. В этом случае пару частиц — ядро и электрон — можно

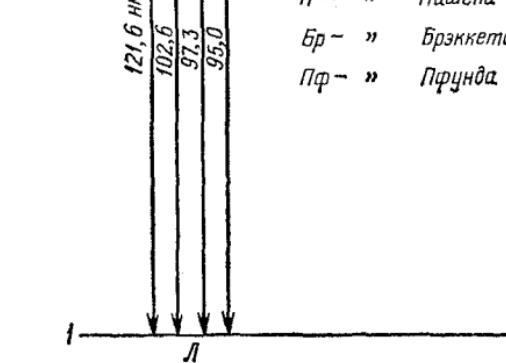


Рис. 21

лишь условно называть атомом. Если понимать под атомом только связанные состояния, то можно сказать, что уровни энергии атома всегда дискретны, как это и постулировал Бор.

Наличие несвязанных электронов делает, однако, возможными квантовые переходы между состояниями непрерывного энергетического спектра, а также между такими состояниями и состояниями дискретного спектра энергии. Это проявляется в виде сплошного спектра испускания или поглощения, накладывающегося на линейчатый спектр атома. Вот почему, в частности, спектр атома не обрывается на границе серии, а продолжается за нее в сторону более коротких волн, где он становится сплошным. Квантовые переходы из состояний непрерывного энергетического спектра, т. е. из состояний, в которых атом

ионизован, в состояния дискретного спектра сопровождаются рекомбинацией электронов с соответствующими положительными ионами. Излучение, возникающее при таких переходах, называется *рекомбинационным*.

Переход атома из нормального состояния на более высокий энергетический уровень дискретного спектра есть *возбуждение атома*. Переход же атома с одного из уровней дискретного спектра в область сплошного спектра превращает атом в несвязанную систему. Это есть процесс *ионизации атома*. Если вначале атом находился в нормальном состоянии, то, очевидно, минимальная энергия ионизации атома определяется выражением $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \mathcal{E}_{\infty} - \mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_1$, т. е. для водородоподобного атома

$$\mathcal{E}_{\text{ион}} = (Ze^2)^2 m/2\hbar^2 = 2\pi c\hbar Z^2 R_{\infty} = c\hbar Z^2 R_{\infty}, \quad (13.11)$$

или

$$\mathcal{E}_{\text{ион}} = 21,8 \cdot 10^{-12} Z^2 \text{ эрг} = 13,6 Z^2 \text{ эВ}. \quad (13.12)$$

4. До 1913 г., т. е. до появления теории Бора, водороду приписывались еще две серии:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{\bar{n}^2} \right), \quad \bar{n} = 2, 3, 4, \dots, \quad (13.13)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(\bar{n} + 1/2)^2} \right), \quad \bar{n} = 2, 3, 4, \dots \quad (13.14)$$

Серия (13.13) была открыта Фаулером (1889—1944) в смеси Н и Не, а серия (13.14) наблюдалась Пикерингом в спектре планетарной туманности (ξ Кормы). Однако, согласно теории Бора, линии этих серий принадлежат не водороду Н, а однократно ионизованному гелию He^+ . Они содержатся в спектральных сериях последнего:

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots, \quad (13.13a)$$

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7, \dots, \quad (13.14a)$$

если пренебречь различием постоянных Ридберга для водорода и гелия. В действительности эти постоянные немного отличаются одна от другой, как видно из формулы

$$\frac{R_{\text{He}}}{R_H} = \frac{1 + m_e/M_{\text{H}}}{1 + m_e/M_{\text{He}}} = 1,00041. \quad (13.15)$$

Если, однако, не учитывать различие между R_{He} и R_H , то в этом приближении линии серий (13.13) совпадут с линиями серии (13.13a) при четных n , а линии серии (13.14) — с линиями серии (13.14a) при нечетных n . И действительно, серии (13.13a) и (13.14a) получались экспериментально в чистом гелии. Конечно, нет никаких оснований делить единые серии (13.13a) и (13.14a)

на две половины, выделяя из них серии Фаулера (13.13) и Пикеринга (13.14). В действительности R_{He} немного больше R_{H} . Благодаря этому спектральные линии однократно ионизованного гелия He^+ оказываются немного смещеными в коротковолновую сторону спектра относительно соответствующих бальмеровских линий водорода. Такой эффект называется *изотопическим смещением спектральных линий*.

Разумеется, этот эффект существует и для других химических элементов и их ионов, хотя для многоэлектронных атомов его и нельзя трактовать столь же просто, как в случае атомов водородоподобных. Действительно, различные изотопы одного и того же химического элемента или иона отличаются только массами ядер. Но они имеют одинаковые заряды ядер, а потому и одинаковые электронные оболочки. Процессы же излучения света происходят как раз в *электронных оболочках*.

Говорить об изотопическом смещении линий гелия относительно линий водорода на первый взгляд кажется нелогичным, поскольку гелий не является изотопом водорода. Однако в эффекте смещения спектральных линий речь идет не об атомах гелия, а о его *однократно ионизованных* атомах. Последние же в рассматриваемом вопросе *ведут себя как* изотопы водорода. Так же обстоит дело и в случае других элементов.

Заметим, что изотопическое смещение спектральных линий обусловлено не только различием масс изотопов, но и *различием размеров их атомных ядер*. Забегая вперед, это нетрудно понять, если проблему квантования рассматривать на основе уравнения Шредингера (см. § 22). В самом деле, для различных изотопов кулоновские и ядерные силовые поля внутри ядра несколько отличаются друг от друга. Различны также размеры областей, занимаемых этими полями. Это ведет к небольшому различию волновых функций и соответствующих им собственных значений энергии. Влияние размеров ядра на изотопическое смещение спектральных линий особенно существенно для тяжелых ядер. Здесь изотопическое смещение, вызванное различием размеров ядер, того же порядка, что и изотопическое смещение, вызванное различием их масс.

5. Известно, что наряду с обычным водородом существуют два изотопа его, называемые *дейтерием* и *тритием*. Ядро атома обычного водорода состоит всего из одного протона. Такой водород называется *протием*. Ядро атома дейтерия называется *дейтроном*, а ядро атома трития — *тритоном*. Дейтрон состоит из протона и нейтрана, тритон — из протона и двух нейтронов. Эти ядра тяжелее ядра протия соответственно в 2 и 3 раза. Атом дейтерия обозначается через D или ${}^2\text{H}$, а атом трития — через T или ${}^3\text{H}$. Дейтерий — стабильный изотоп, а тритий — радиоактивный. Тритий образуется искусственно при бомбардировке ускоренными дейтронами литиевой или бериллиевой ми-

шеней. В ничтожных количествах он образуется также в атмосфере под действием космических лучей. В природных соединениях воды на каждые 6800 атомов протия приходится в среднем один атом дейтерия. Благодаря относительно большой разности масс D и H различие их физических свойств выражено значительно сильнее, чем для других изотопов. Так, плотность тяжелой воды D₂O примерно на 10 % больше плотности обыкновенной воды H₂O, а температура плавления (при нормальном атмосферном давлении) составляет 3,8°C. Но изотопическое смещение спектральных линий для D и H невелико. Действительно, например,

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1 + m_e/M_H}{1 + m_e/M_D} = 1,000272.$$

Отсюда следует, что для изотопического сдвига частот или длин волн дейтерия относительно водорода получается

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_D - R_H}{R_H} = m_e \left(\frac{1}{M_H} - \frac{1}{M_D} \right) = 0,000272.$$

Так, бальмеровская линия D _{α} дейтерия смещена относительно соответствующей линии H _{α} водорода в коротковолновую сторону спектра всего на $|\Delta\lambda| = 0,179$ нм.

6. Расчеты, приведенные выше, обоснованы только при больших квантовых числах n . Однако Бор первоначально принял, что электроны в стационарных состояниях движутся по определенным орбитам, как частицы в классической механике. С этой точки зрения и при малых n должна быть справедлива не только формула (13.8) для энергии стационарного состояния, но и формула (13.7), определяющая радиус орбиты электрона. Квантовая механика от орбит отказалась. Однако формула (13.7) сохраняет смысл и в квантовой механике. Она по порядку величины определяет размеры атома в соответствующих стационарных состояниях. Точный смысл этого выражения будет указан в § 27. Сейчас же заметим, что радиус орбиты электрона в нормальном состоянии атома обычного водорода (т. е. при $n = 1$) называется *боровским радиусом* и обозначается через r_B . Согласно (13.7) он равен

$$r_B = \hbar^2/m e^2 = 0,52917 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \quad (13.16)$$

По порядку эта величина совпадает с размерами атомов, к которым ранее приводила кинетическая теория вещества. Напряженность электрического поля ядра на первой боровской орбите атома водорода

$$E = e/r_B^2 = 17,2 \cdot 10^6 \text{ СГСЭ} = 51,5 \cdot 10^8 \text{ В/см.}$$

Вообще, величина $E \sim 10^8$ В/см является характерным масштабом для напряженностей внутриатомных электрических полей.

Во внешних полях с напряженностью такого порядка атомы быстро ионизуются.

Легко видеть, что скорость движения электрона по стационарной круговой орбите определяется выражением

$$v = (Z/n)ac, \quad (13.17)$$

где α — безразмерная постоянная:

$$a = e^2/\hbar c = 1/137,03604(11) \approx 1/137, \quad (13.18)$$

называемая *постоянной тонкой структуры*. Для движения по первой боровской орбите атома водорода

$$v = ac = c/137 = 0,00730c. \quad (13.19)$$

Если постоянную α ввести в формулу (13.8), то получится

$$\mathcal{E}_n = -(Z^2/2n^2) a^2 mc^2, \quad (13.20)$$

т. е. \mathcal{E}_n выразится через собственную энергию электрона mc^2 .

ЗАДАЧИ

1. Найти границы спектральной области, в пределах которой расположены линии серии Бальмера атомарного водорода.

Ответ. $\lambda_{B\infty} \leq \lambda < \lambda_{B\kappa}$, где $\lambda_{B\infty} = 4/R_H = 364,705$ нм, $\lambda_{B\kappa} = 36/(5R_H) = 656,468$ нм (красная линия).

2. Используя данные, полученные при решении предыдущей задачи, определить длины волн коротковолновых границ водородных серий Лаймана и Пашена.

Ответ. Для серии Лаймана $\lambda_{L\infty} = \lambda_{B\infty}/4 = 91,1762$ нм. Для серии Пашена $\lambda_{P\infty} = 9/\lambda_{B\infty} = 820,586$ нм.

3. Вычислить энергию, которую надо сообщить атому водорода, чтобы его серия Бальмера содержала только одну спектральную линию.

Ответ. $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_1 = 8/9 \hbar c R_H = 12,09$ эВ, $\mathcal{E}_2 = 15/16 \hbar c R_H = 12,75$ эВ.

4. Какие спектральные линии появятся в спектре атомарного водорода при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны 100 нм?

Ответ. $\lambda_1 = 4/3R_H = 121,5682$ нм, $\lambda_2 = 9/8R_H = 102,57317$ нм, $\lambda_3 = 36/5R_H = 656,46828$ нм.

5. Будет ли атом водорода поглощать излучение с волновым числом $1/\lambda = 3R$?

Ответ. Такое поглощение происходит и сопровождается ионизацией атома.

6. Первоначально неподвижный атом водорода испустил фотон с частотой, соответствующей головной линии серии Лаймана. Определить относительное изменение частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ из-за отдачи. Какую скорость v приобрел атом после излучения фотона?

Ответ.

$$\frac{\nu_0 - v}{\nu_0} = \frac{\hbar\nu_0}{2m_{at}c^2} = \frac{3}{16} \frac{m_e}{m_{at}} a^2 = 5,44 \cdot 10^{-9};$$

$$v = \frac{3}{8} \frac{m_e}{m_{at}} a^2 c = 326 \text{ см/с},$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

7. Найти потенциалы ионизации ионов He^+ и Li^{++} .

Ответ. $V_{\text{He}} = 4V_{\text{H}} = 54 \text{ В}; V_{\text{Li}} = 9V_{\text{H}} = 122 \text{ В}.$

8. Найти длину волны резонансной линии He^+ .

Ответ. $\lambda = 30,375 \text{ нм}.$

9. Определить наименьшую энергию, которую надо сообщить в основном состоянии трижды ионизованному атому берилля, чтобы возбудить полный спектр этого атома.

Ответ. $\mathcal{E}_{\text{Be}} = hcZ^2R_{\text{H}} = 217,5747 \text{ эВ.}$

10. Фотон головной серии Лаймана иона гелия He^+ поглощается водородным атомом в основном состоянии и ионизует его. Определить кинетическую энергию $\mathcal{E}_{\text{кин}}$, которую получит электрон при такой ионизации.

Ответ. $\mathcal{E}_{\text{кин}} = 2\mathcal{E}_{\text{H, ион}} = 27,2 \text{ эВ, где } \mathcal{E}_{\text{H, ион}} — \text{энергия ионизации атома водорода.}$

11. Оценить по теории Бора число спектральных линий, которые можно получить в различных сериях спектра испускания атомарного водорода в газоразрядной трубке при давлении $P = 5 \text{ мм рт. ст.}$ и температуре $T = 300 \text{ К.}$

Решение. Водородные серии Лаймана, Бальмера, Пашена и т. д. излучаются изолированными атомами, т. е. практически тогда, когда диаметр боровской орбиты $2r = 2n^2r_{\text{B}}$ не превосходит среднего расстояния между атомами $l = (kT/P)^{1/3}$. Пользуясь этим, максимально допустимый номер орбиты n можно оценить по формуле $n \approx \sqrt{l/(2r_{\text{B}})}$. Максимально возможное число линий, которые можно наблюдать в трубке при давлении и температуре, указанных в условии задачи, будет равно:

в серии Лаймана $n - 1 \approx 12$,

в серии Бальмера $n - 2 \approx 11$,

в серии Пашена $n - 3 \approx 10$.

12. В спектрах некоторых звезд наблюдается $m \sim 40$ линий водородной серии Бальмера. При каком наименьшем числе N штрихов дифракционной решетки можно разрешить эти линии в спектре первого порядка?

Ответ. $N \approx m^3/8 = 8000$ штрихов.

13. Вблизи спектральной линии водорода $\lambda_1 = 486,1320 \text{ нм}$ Юри (1893—1981) в 1932 г. обнаружил близкую линию $\lambda_2 = 485,9975 \text{ нм}$. Предполагая, что эта линия обусловлена небольшой примесью к обычному водороду его изотопа, определить относительную атомную массу m_x/m_{H} этого изотопа.

Решение. Из формулы (13.10) нетрудно получить

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \approx \frac{1 - m_e/m_{\text{H}}}{1 - m_e/m_x},$$

где m_x — атомная масса неизвестного изотопа. Отсюда

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} \approx \frac{m_e}{m_x} - \frac{m_e}{m_{\text{H}}},$$

если пренебречь величиной m_e/m_x по сравнению с единицей. (В пределах точности расчета под λ можно понимать любое из значений λ_1, λ_2 .) Следовательно,

$$\frac{m_e}{m_x} = \frac{m_e}{m_{\text{H}}} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda}.$$

Так как $m_e/m_{\text{H}} = 1/1835$, то отсюда получаем $m_e/m_x = 1/3727$. Следовательно, $m_x/m_{\text{H}} \approx 2$. Линия λ_2 принадлежит дейтерию.

14. Определить разности длин волн бальмеровской серии водорода и дейтерия в видимой области спектра.

Ответ. $\lambda_{H_\alpha} - \lambda_{D_\alpha} = 0,179 \text{ нм}$ $\lambda_{H_\beta} - \lambda_{D_\beta} = 0,132 \text{ нм.}$ $\lambda_{H_\gamma} - \lambda_{D_\gamma} = 0,118 \text{ нм;}$ $\lambda_{H_\delta} - \lambda_{D_\delta} = 0,116 \text{ нм.}$

15. Определить разрешающую способность R (не путать с постоянной Ридберга) спектрального аппарата, необходимую для наблюдения изотопического смещения спектральных линий дейтерия относительно линий водорода. Какова должна быть ширина b основания призмы из тяжелого флинта с дисперсией $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$ (в диапазоне красного света) в призменном спектрографе, если его применять для обнаружения изотопического смещения головной (длинноволновой) линии серии Бальмера?

Ответ.

$$R > 2 \frac{m_H}{m_e} \approx 3700; \quad b > \frac{R}{dn/d\lambda} \approx 3,7 \text{ см.}$$

16. Серия Лаймана наблюдается в смеси атомарных водорода и трития. Определить разрешающую способность R спектрального прибора, достаточную для разрешения изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется требуемая разрешающая способность при переходе к другим сериям (Бальмера, Пашена) той же смеси? Можно ли разрешить изотопическую структуру спектральных линий рассматриваемой смеси в видимой области спектра с помощью стеклянной призмы с основанием $b = 1 \text{ см}$ и дисперсией показателя преломления $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$? Каково должно быть эффективное число отражений $N_{\text{эфф}}$ и порядок m наблюдаемого спектра, чтобы разрешить и исследовать ту же структуру с помощью интерферометра Фабри — Перо?

Ответ. Разрешающая способность должна быть не меньше $\frac{3}{2} m_p/m_e \approx 2800$. Она одинакова для всех линий спектральных серий смеси. Разрешающая способность призмы $b dn/d\lambda = 1000$, т. е. недостаточна для разрешения.

$$m < \frac{3}{2} m_p/m_e < N_{\text{эфф}} m.$$

17. Зная постоянные Ридберга для водорода и гелия ($R_{\text{He}} = 109\,722,267 \text{ см}^{-1}$), а также R_∞ , вычислить отношение $m_{\text{He}}/m_{\text{H}}$ массы атома гелия к массе атома водорода.

Ответ.

$$m_{\text{He}}/m_{\text{H}} \approx \frac{R_\infty - R_{\text{H}}}{R_\infty - R_{\text{He}}} = 3,971.$$

18. Удельный заряд электрона e/m можно вычислить спектроскопически. Произвести это вычисление, пользуясь спектроскопическими данными

$$R_{\text{H}} = 109\,677,576 \text{ см}^{-1}, \quad R_{\text{D}} = 109\,707,419 \text{ см}^{-1},$$

молярными массами атомарных водорода и дейтерия

$$\mathcal{M}_{\text{H}} = 1,008142 \text{ г/моль}, \quad \mathcal{M}_{\text{D}} = 2,014755 \text{ г/моль}$$

и постоянной Фарадея

$$F = N_A e = 2,89366 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ/моль} = 9632,19 \text{ СГСМ/моль}.$$

Решение. Постоянные Ридберга для водорода и дейтерия:

$$R_{\text{H}} = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M_{\text{H}}}, \quad R_{\text{D}} = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M_{\text{D}}},$$

где M_{H} и M_{D} — массы ядер водорода и дейтерия. Отсюда получаем

$$\frac{1}{m_e} = \frac{1}{R_{\text{D}} - R_{\text{H}}} \left(\frac{R_{\text{H}}}{M_{\text{H}}} - \frac{R_{\text{D}}}{M_{\text{D}}} \right).$$

Умножая обе части этого соотношения на e и принимая во внимание, что $(M_{\text{H}} + m_e)N_A = \mathcal{M}_{\text{H}}$, $(M_{\text{D}} + m_e)N_A = \mathcal{M}_{\text{D}}$ (здесь m_e , M_{H} и M_{D} — в граммах),

$N_A e = F$, найдем

$$\frac{e}{m_e} = \frac{F}{R_D - R_H} \left(\frac{R_H}{M_H - N_A m_e} - \frac{R_D}{M_D - N_A m_e} \right).$$

Так как масса электрона мала по сравнению с массой атома, то нет необходимости вычислять величину $N_A m_e$ с высокой точностью. Достаточно принять

$$N_A m_e = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 9,11 \cdot 10^{-28} = 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ г/моль};$$

получаем

$$M_H - N_A m_e = 1,007593 \text{ г/моль}; \quad M_D - N_A m_e = 2,014206 \text{ г/моль}.$$

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, находим

$$e/m_e = 5,2732 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ/г} = 1,7590 \cdot 10^7 \text{ СГСМ/г}.$$

Точность этих вычислений теряется при определении разности $R_D - R_H$. Поэтому сами величины R_H и R_D надо знать с исключительно высокой точностью. Существенно, что постоянная Ридберга R_∞ в вычисления не входит.

19. Позитроний (химический символ Ps) представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг центра масс этой системы. Позитроний образуется при столкновении медленных позитронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона. Это — нестабильная система, так как электрон и позитрон очень быстро аннигилируют в два (за время $\sim 10^{-10}$ с) или три (за время $\sim 10^{-7}$ с) гамма-кванта. Найти уровни энергии, энергию ионизации и длину волны резонансной линии для позитрония.

Ответ.

$$\mathcal{E}_{Ps} = -(hc/2n^2) R_\infty; \quad \mathcal{E}_{\text{ион}} = (hc/2) R_\infty = 6,80 \text{ эВ}, \lambda_{\text{рез}} = 243 \text{ нм}.$$

20. При торможении в веществе отрицательно заряженных элементарных частиц (мюонов μ^- , π^- -мезонов, K^- -мезонов и пр.) они могут захватываться кулоновским полем ядра, замещая электроны электронной оболочки. Наибольшее значение имеет захват отрицательных мюонов. Практически может замещаться лишь один электрон. Получающиеся в результате такой замены системы называются мезоатомами. Масса мюона $m_\mu = 207 m_e$. Вычислить по теории Бора радиус первой круговой орбиты (K -орбиты) мюона в мезоатоме. Рассчитать энергетические уровни мезоатома. Какое излучение будет наблюдаться при переходе на K -орбиту мюона с более высоких орбит? Почему исследование такого излучения применяется для выяснения структуры тяжелых атомных ядер вблизи их поверхностей? Массой мюона по сравнению с массой ядра пренебречь.

Решение. Электронная оболочка атома практически не оказывает влияния на движение мюона в мезоатоме, так как последний находится либо очень близко от ядра, либо внутри ядра. Поэтому из-за сферической симметрии электронного облака создаваемое им электрическое поле в месте нахождения мюона может считаться равным нулю. Если орбита мюона проходит вне ядра, то для радиуса K -орбиты мюона получается

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 e^2 m_\mu Z} = \frac{0,0026}{Z} \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

что примерно в 200 раз меньше соответствующего значения r_1 для водородоподобного атома с тем же значением зарядового числа Z . В том же предположении для уровней энергии получаем

$$\mathcal{E}_n = -hcR_\infty Z^2 m_\mu / m_e = -2820 Z^2 \text{ эВ}.$$

Отсюда видно, что излучение, возникающее при переходе мюона на K -орбиту с более высоких орбит, будет расположено в рентгеновской области

спектра, а при больших Z — в области γ -лучей. При больших Z K -орбита мюона проходит внутри ядра атома. В этом случае приведенные выше формулы становятся неприменимыми. Результаты сильно зависят от распределения электрического заряда в ядре, с чем и связана возможность использования мезоатомов для изучения структуры атомного ядра.

§ 14. Экспериментальное подтверждение постулатов Бора

1. Результаты, изложенные в предыдущем параграфе, являются убедительным экспериментальным подтверждением постулатов Бора. Постулаты Бора лежат в основе физических представлений, которыми руководствовались при создании и совершенствовании оптических квантовых генераторов (лазеров) (см. т. IV, гл. XI), открывших принципиально новые пути не только в физике, но и в технике и других отраслях науки. То обстоятельство, что эти приборы работают в соответствии с предсказаниями теории, свидетельствует о правильности последней, а следовательно, и о правильности самих постулатов Бора.

В этом параграфе приводятся другие экспериментальные факты, подтверждающие постулаты Бора. Сюда относятся прежде всего опыты Джеймса Франка (1882—1964) и Густава Герца (1887—1975), начатые незадолго до появления теории Бора. Первоначальная цель их состояла в измерении *потенциалов ионизации атомов*. Но эти опыты принесли экспериментальное подтверждение постулатов Бора, т. е. решили более важную задачу. В опытах Франка и Герца через исследуемый газ проходили ускоренные электроны. При столкновении с атомами газа последние могли переходить в *возбужденные состояния*, каждое из которых характеризуется определенным значением энергии. Если энергетические уровни атома дискретны, как утверждает первый постулат Бора, то кинетическая энергия электронов должна быть не меньше некоторой минимальной величины, чтобы они начали возбуждать атомы газа. Такой метод возбуждения атомов особенно пригоден для инертных газов и паров металлов, так как атомы этих веществ не обладают электронным сродством, т. е. не проявляют склонности к захвату электронов и образованию отрицательных ионов. Франк и Герц в своих первых опытах пользовались парами ртути. Разумеется, ртутный пар должен быть сравнительно плотным, чтобы электроны сталкивались с атомами достаточно часто. Опыты производились при различных плотностях ртутного пара. С этой целью лампа, в которую было введено несколько капель ртути, помещалась в печь, температуру которой можно было менять и поддерживать постоянной во время опыта.

2. Схема опыта Франка и Герца приведена на рис. 22. Ускоряющая разность потенциалов V приложена между накаливаемым катодом K и сеткой S . Выйдя из K , электроны, пройдя че-