

## ГЛАВА III

# ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА

### § 17. Гипотеза де Бройля

1. Создание последовательной теории для описания явлений атомных и субатомных масштабов было начато и вчerne завершено в 1925—1926 гг. Такая теория получила название *квантовой механики*. Сначала возникло то направление в квантовой механике, которое получило название *матричной механики*. Ее основные идеи были заложены в основополагающей работе Гейзенберга (1901—1976) «О квантовомеханическом истолковании кинематических и механических соотношений». Систематическое построение матричной механики было дано Борном (1882—1970) и Иорданом (1902—1980), к которым в дальнейшем присоединился и сам Гейзенберг. К этому направлению примыкает и та форма квантовой механики, которая практически одновременно и независимо была разработана Дираком. Немного позже в работах Шредингера (1887—1961) появилось другое направление, названное *волновой механикой*. Вскоре было выяснено, что эти два направления, отличаясь по форме, тождественны по своему физическому содержанию.

В общем курсе целеусообразно говорить о весьма абстрактной матричной механике. Ограничимся только изложением, далеко не полным, физических представлений волновой механики. Разумеется, мы не можем подробно излагать сложный математический аппарат, составляющий неотъемлемую и весьма важную часть квантовой механики. Это делается в курсах теоретической физики.

2. Построению волновой механики Шредингера предшествовали работы Луи де Бройля (р. 1892). В 1923—1924 гг. он выдвинул и развил идеи о волнах вещества. К тому времени в оптике уже сложилась парадоксальная, но подтверждаемая опытом ситуация: в одних явлениях (интерференции, дифракции, ...) свет ведет себя как *волны*; другие явления (фотоэффект, эффект Комптона, ...) показывают с неменьшей убедительностью, что он ведет себя и как *частицы*. Де Бройль поставил вопрос, не распространяется ли подобный корпускулярно-волновой дуализм и на обычное вещество? Если это действительно так, то каковы волновые свойства частиц вещества? Ответ, подтвержденный в дальнейшем опытами, оказался положительным,

Пусть частица движется в свободном пространстве с постоянной скоростью  $v$ . Де Бройль предположил, что с такой частицей связана какая-то плоская монохроматическая волна

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (17.1)$$

распространяющаяся в направлении скорости  $v^1$ ). О природе этой волны, т. е. о физическом смысле функции  $\Psi$ , де Бройль не мог сказать ничего определенного. Отвлечемся временно и мы от обсуждения этого вопроса. Волны типа (17.1) получили название *фазовых волн, волн вещества или волн де Бройля*.

Попытаемся установить рациональную связь между корпускулярными и волновыми характеристиками частицы, которая совсем не зависит от физической природы величины  $\Psi$ . Будем руководствоваться требованием, чтобы эта связь была релятивистски инвариантна. Корпускулярные свойства частицы характеризуются ее энергией  $\mathcal{E}$  и импульсом  $\mathbf{p}$ , волновые — частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Под  $\mathcal{E}$  мы будем понимать *полную энергию* частицы в смысле теории относительности. Она определяется однозначно требованием, чтобы *энергия и импульс образовывали четырехмерный вектор  $(\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$*  (см. т. IV, § 111, пункт 3). Частоту  $\omega$  определим из требования, чтобы фаза волны  $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$  была релятивистски инвариантна (см. по этому поводу § 19, пункт 9). Тогда  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  будут образовывать четырехмерный вектор  $(\omega/c, \mathbf{k})$ . Если потребовать, чтобы временные и пространственные компоненты четырехмерных векторов  $(\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  и  $(\omega/c, \mathbf{k})$  были пропорциональны друг другу, то получатся релятивистски инвариантные соотношения

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad (17.2)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (17.3)$$

Они будут совпадать с соответствующими соотношениями для фотонов, если для всех частиц  $\hbar$  положить равной постоянной Планка, что мы и сделаем. Такой выбор  $\hbar$  логически не необходим, а оправдывается последующими результатами. Соотношения (17.2) и (17.3) и были постулированы де Бройлем.

Во всякой инерциальной системе отсчета волновой вектор  $\mathbf{k}$  определен абсолютно однозначно, поскольку соотношением (17.3) он однозначно выражается через импульс частицы  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Напротив, соотношение (17.2) такой абсолютной однозначностью не отличается. Здесь однозначность навязана искусственно — требованием, чтобы  $\mathcal{E}$  и  $\omega$  были временными

<sup>1)</sup> В оптике монохроматическая волна записывалась в виде  $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ . Сейчас мы употребляем комплексно сопряженное выражение  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ . Оба способа написания совершенно равноправны. Но в квантовой механике укоренилось написание волны именно в форме (17.1). Однако независимо от способа написания под фазой волны следует понимать выражение  $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ .

компонентами четырехмерных векторов. В принципе же энергия определена всегда с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Мы увидим далее (см. § 19), что и частоту  $\omega$  можно переопределить так, чтобы она также содержала аддитивную постоянную.

3. Рассмотрим некоторые свойства волн де Броиля, вытекающие из соотношений (17.2) и (17.3). Прежде всего из (17.3) получаем выражение для длины волны де Броиля:

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p = h/p. \quad (17.4)$$

Эта величина в каждой инерциальной системе отсчета определена однозначно.

Для фазовой скорости волн де Броиля формулы (17.2) и (17.3) дают

$$v_\phi = \omega/k = \mathcal{E}/p. \quad (17.5)$$

В релятивистской теории  $\mathcal{E} = mc^2$ ,  $p = mv$ , где  $v$  — скорость частицы, а  $m$  — релятивистская масса. В этом случае

$$v_\phi = c^2/v. \quad (17.6)$$

Поскольку всегда  $v \leq c$ , отсюда следует, что  $v_\phi \geq c$ . Для фотонов в вакууме  $v = c$ , а потому в этом случае  $v_\phi = c$ . Полученный результат не должен нас смущать, поскольку на величину фазовой скорости не накладывается никаких ограничений. К тому же в дальнейшем будет показано, что, согласно современной физической интерпретации, фазовая скорость волн де Броиля имеет чисто символическое значение, так как эта интерпретация относит ее к числу принципиально ненаблюдаемых величин.

Принципиально наблюдаемой величиной является групповая скорость волн де Броиля

$$v_{gp} = d\omega/dk = d\mathcal{E}/dp. \quad (17.7)$$

Эта величина не содержит никакой неопределенности, поскольку не только  $dp$ , но и приращение энергии  $d\mathcal{E}$  определены однозначно. При любой скорости движения частицы  $d\mathcal{E} = v dp$ , так что всегда

$$v_{gp} = v, \quad (17.8)$$

т. е. групповая скорость волн де Броиля равна скорости частицы. Заменив теперь в формуле (17.6)  $v$  на  $v_{gp}$ , получаем

$$v_\phi v_{gp} = c^2. \quad (17.9)$$

Формально можно образовать величину, аналогичную длине волны де Броиля (17.4). Для этого заметим, что длина четырехмерного вектора энергии-импульса частицы в пространстве Минковского равна  $\sqrt{(\mathcal{E}/c)^2 - p^2}$ . Это есть инвариант, равный

$m_0c$ , где  $m_0$  — масса покоя частицы. Поделив на него постоянную Планка  $\hbar$ , получим инвариантную величину

$$\lambda_k = \hbar/m_0c, \quad (17.10)$$

имеющую размерность длины. Она представляет собой комптоновскую длину частицы. Таким образом, формально  $\lambda_k$  можно рассматривать как длину волны де Бройля, которой соответствует величина импульса, равная инвариантной длине четырехмерного вектора энергии-импульса частицы в пространстве Минковского.

4. Де Бройль использовал представление о фазовых волнах для наглядного толкования таинственного правила квантования Бора (13.6) в случае одноэлектронного атома. Он рассмотрел фазовую волну, бегущую вокруг ядра по круговой орбите электрона. Если на орбите длина волны  $\lambda$  укладывается целое число раз (рис. 27), то волна при обходе вокруг ядра будет всякий раз возвращаться в исходную точку с той же фазой и амплитудой. В каждой точке орбиты установится неизменный колебательный режим во времени и не возникнет излучения. В этом случае орбита получится стационарной. Если же указанное условие не выполняется, то при обходе вокруг ядра фаза и амплитуда волны не возвратятся к своим исходным значениям — стационарного состояния не получится. Исходя из этих соображений, де Бройль записал условие стационарности орбиты, или правило квантования, в виде

$$2\pi R/\lambda = n, \quad (17.11)$$

где  $R$  — радиус круговой орбиты, а  $n$  — целое число (главное квантовое число). Полагая здесь  $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$  и замечая, что  $L = Rp$  есть момент количества движения электрона, получим

$$L = nh, \quad (17.12)$$

что совпадает с условием (13.6). В этом де Бройль видел успех своей концепции фазовых волн. В дальнейшем условие (17.11) удалось обобщить и на случай эллиптических орбит, когда длина волны  $\lambda$  меняется вдоль траектории электрона. Казалось, что это еще больше усиливало успех теории.

На самом деле этот успех призрачный. В рассуждении де Бройля предполагается, что волна распространяется не в пространстве, а вдоль линии — вдоль стационарной орбиты электрона. Такая идеализация соответствует приближению

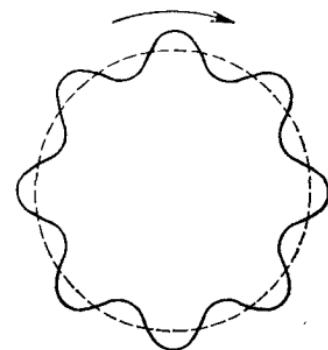


Рис. 27

геометрической (лучевой) оптики. Этим приближением можно пользоваться в предельном случае, когда длина волны  $\lambda$  пре-небрежимо мала по сравнению с радиусом орбиты электрона, т. е. при больших квантовых числах. А тогда проблема квантования несущественна. Чтобы действительно получить существенно новое, надо заменить геометрическую оптику волновой. Это и было сделано Шредингером.

5. К полученным результатам можно пройти и другим путем. Для этого введем *показатель преломления*  $\mu$  волн де Броиля — важную величину, имеющую и самостоятельное значение. Пространство, в котором распространяется волна де Броиля, условимся называть *средой*. Если в среде нет силового поля, то среда будет однородной. Показатель преломления среды может быть определен лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, так как для преломления фазовых волн на границе раздела двух сред имеет значение только отношение показателей преломления этих сред. Во всякой волновой теории  $\mu$  обратно пропорционален фазовой скорости волны. В случае волн де Броиля  $\mu \sim 1/v_{\text{фаз}} = v/c^2$ . Опуская постоянный множитель, можно принять

$$\mu = v. \quad (17.13)$$

Определляемый этой формулой показатель преломления условно будем называть *абсолютным*. Формула (17.13) сохраняет смысл и в том случае, когда скорость частицы  $v$  меняется от точки к точке, т. е. при наличии силовых полей. Скорость  $v$ , а с ней и  $\mu$  в каждой точке однозначно определяются уравнением энергии  $\mathcal{E} + U = \text{const}$ , в котором предполагается, что потенциальная функция  $U$  зависит только от координат, но не зависит явно от времени.

В предельном случае коротких длин волн распространение последних происходит вдоль независимых линий или *лучей* (см. т. IV, § 6). Этот случай называется *геометрической* или *лучевой оптикой*. Распространение волнового возмущения вдоль лучей формально аналогично движению частицы классической механики по траекториям. Радиус кривизны  $R$  луча или траектории частицы определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial N} (\ln \mu) = \frac{\partial}{\partial N} (\ln v), \quad (17.14)$$

где дифференцирование производится в направлении главной нормали  $N$  к лучу или траектории (см. т. IV, § 4). Эта формула, конечно, может быть использована (вместо уравнений Ньютона) для определения формы луча или траектории частицы.

Вернемся теперь к выводу правила квантования, данному де Броилем. Условие применимости геометрической оптики к

движению электрона вокруг ядра атома выражается формулой

$$|\lambda d\mu/dr| \ll \mu, \text{ т. е. } |\lambda dv/dr| \ll v.$$

Подставив сюда  $\lambda = 2\pi\hbar/p$ ,  $\mu = v$  и ограничиваясь нерелятивистским приближением, запишем это так:

$$|2\pi\hbar dv/dr| \ll rv = 2K, \quad (17.14a)$$

где  $K$  — кинетическая энергия электрона. Скорость  $v$  найдется из уравнения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \mathcal{E} = \text{const.}$$

Отсюда находим

$$mv r \frac{dv}{dr} = -\frac{Ze^2}{r} = U,$$

где  $U$  — потенциальная энергия. Если электрон движется по окружности, то  $mv r = n\hbar$ , а потому

$$n\hbar \frac{dv}{dr} = U = \mathcal{E} - K = -2K,$$

так как при движении по окружности  $\mathcal{E} + K = 0$ . Сопоставляя получение соотношение с неравенством (17.14a), находим

$$n \gg 2\pi,$$

т. е. квантовое число  $n$  должно быть большим в согласии с тем, что было установлено выше.

6. Все изложенное представляет собой чисто умозрительное, гипотетическое построение, а потому не имеет доказательной силы. Истинное доказательство или опровержение полученных результатов может дать только опыт. В каких же явлениях природы могут проявиться волновые свойства вещества, если они действительно существуют? Независимо от физической природы волн сюда относятся явления интерференции и дифракции. Непосредственно наблюдаемой величиной в них является длина волны  $\lambda$ . Во всех случаях длины волн де Броиля определяются формулой (17.4). Применим ее к нерелятивистскому движению частиц.

Для электронов, ускоренных разностью потенциалов  $V$ , импульс определяется формулой  $p = \sqrt{2m_e e V}$ , так что в абсолютной системе единиц

$$\lambda_e = \hbar / \sqrt{2m_e e V}. \quad (17.15)$$

Положим здесь  $\hbar c = 1,2399 \cdot 10^{-4}$  эВ·см,  $m_e c^2 = 511\,003$  эВ. Тогда получится практическая формула

$$\lambda_e = \sqrt{150,42/V_{(B)}} \cdot 10^{-8} \text{ см} = \frac{1,2264}{\sqrt{V_{(B)}}} \text{ нм.} \quad (17.16)$$

Для протонов

$$\lambda_p = 0,02862 / \sqrt{V_{(B)}} \text{ нм.} \quad (17.17)$$

Вычислим еще длину волны де Броиля для молекул неподвижного газа при абсолютной температуре  $T$ . Задача эта — не совсем определенная, поскольку молекулы движутся с тепловыми скоростями, распределенными по закону Максвелла. Не вдаваясь в обоснование (см. задачу к следующему параграфу), будем понимать под  $v$  среднюю квадратичную скорость молекулы. Тогда ее импульс будет  $p = \sqrt{3mkT}$ . Отсюда легко получить для атомов гелия ( $m_{He} = 6,7 \cdot 10^{-24}$  г)

$$\lambda_{He} = 1,26 / \sqrt{T} \text{ нм.} \quad (17.18)$$

Для молекул водорода

$$\lambda_{H_2} = 1,78 / \sqrt{T} \text{ нм,} \quad (17.19)$$

а для тепловых нейтронов

$$\lambda_n = 2,52 / \sqrt{T} \text{ нм.} \quad (17.20)$$

Эти формулы показывают, что для электронов, ускоренных до потенциала 100—10 000 В, для атомов гелия и молекул водорода при комнатной температуре, а также для тепловых нейтронов и других «медленных» легких частиц длины волн де Броиля того же порядка, что и длины волн мягких рентгеновских лучей. Поэтому дифракцию таких частиц надо пытаться искать методами, аналогичными тем, которые применяются в случае рентгеновских лучей. Однако гипотеза де Броиля представлялась настолько фантастичной, что сравнительно долго никто из экспериментаторов не пытался подвергнуть ее экспериментальной проверке.

### ЗАДАЧИ

1. Обобщить нерелятивистские формулы (17.15), (17.16) и (17.17) на случай релятивистских электронов и протонов. При каком значении ускоряющего потенциала  $V$  можно пользоваться нерелятивистскими формулами, чтобы ошибка не превосходила одного процента?

Ответ.

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}, \quad (17.15a)$$

где  $m_0$  — масса покоя частицы. Для электронов

$$\lambda_e = \frac{1,2264}{\sqrt{V_{(B)}}} \left(1 + 0,978 \cdot 10^{-6} V_{(B)}\right)^{-1/2} \text{ нм,} \quad (17.16a)$$

для протонов

$$\lambda_p = \frac{0,02862}{\sqrt{V_{(B)}}} \left(1 + 0,533 \cdot 10^{-9} V_{(B)}\right)^{-1/2} \text{ нм.} \quad (17.17a)$$

Нерелятивистскими формулами при указанной точности расчета можно пользоваться для электронов при  $V \leq 20$  кэВ, для протонов при  $V \leq 40$  МэВ.

2. Найти приближенное выражение для длины волны де Броиля ультра-релятивистской частицы, т. е. такой частицы, кинетическая энергия  $\mathcal{E}_{\text{кин}}$  которой много больше энергии покоя  $m_0 c^2$ . При каких значениях  $\mathcal{E}_{\text{кин}}$  полученная формула будет давать ошибку, не превосходящую 1 %? Найти  $\lambda$  для ультра-релятивистской частицы с кинетической энергией  $\mathcal{E}_{\text{кин}} = 10$  ГэВ.

Ответ.  $\lambda = hc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$ . При  $\mathcal{E}_{\text{кин}} > 100 m_0 c^2$  ошибка не превосходит 1 %. При  $\mathcal{E}_{\text{кин}} = 10$  ГэВ  $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-14}$  см.

3. При какой скорости частицы ее деброильевская и комптоновская длины волн равны между собой?

Ответ.  $v = c/\sqrt{2}$ .

## § 18. Экспериментальные подтверждения гипотезы де Броиля

1. Интерференция электронов при отражении от кристаллов была обнаружена, но не понята еще до появления гипотезы де Броиля. Производя опыты по рассеянию электронов тонкими

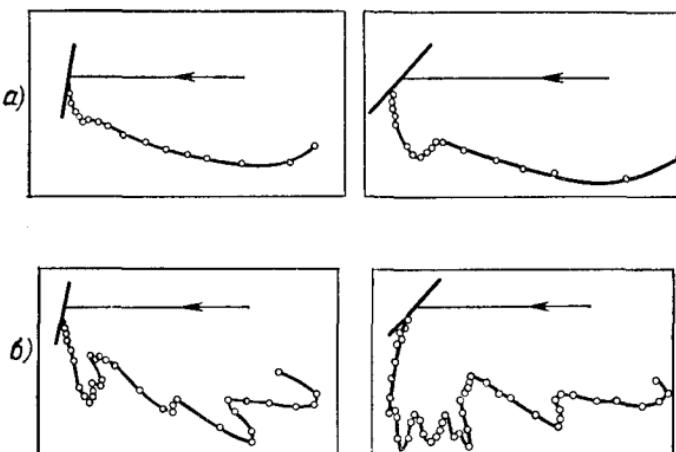


Рис. 28

металлическими фольгами в 1921—1923 гг., Дэвиссон (1881—1958) и Кэнсман наблюдали определенно выраженную зависимость интенсивности рассеянного пучка от угла рассеяния. Положение и величина получающихся максимумов на кривой рассеяния существенно зависели от скорости электронов. В одном из опытов, в котором электроны рассеивались никелевой пластинкой, стеклянный прибор лопнул и пластинка окислилась. После длительного прокаливания пластинки в вакууме и атмосфере водорода произошла перекристаллизация с образованием некоторого количества крупных кристаллов. При повторении опыта по рассеянию электронов с этой пластинкой кривая рассеяния резко изменилась: количество максимумов сильно возросло, а сами максимумы сделались значительно более отчетливыми. На рис. 28 приведены полярные диаграммы рассеяния электронов до прокаливания пластиинки (a) и после