

Нерелятивистскими формулами при указанной точности расчета можно пользоваться для электронов при $V \leq 20$ кэВ, для протонов при $V \leq 40$ МэВ.

2. Найти приближенное выражение для длины волны де Броиля ультра-релятивистской частицы, т. е. такой частицы, кинетическая энергия $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ которой много больше энергии покоя $m_0 c^2$. При каких значениях $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ полученная формула будет давать ошибку, не превосходящую 1 %? Найти λ для ультра-релятивистской частицы с кинетической энергией $\mathcal{E}_{\text{кин}} = 10$ ГэВ.

Ответ. $\lambda = hc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$. При $\mathcal{E}_{\text{кин}} > 100 m_0 c^2$ ошибка не превосходит 1 %. При $\mathcal{E}_{\text{кин}} = 10$ ГэВ $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-14}$ см.

3. При какой скорости частицы ее деброильевская и комптоновская длины волн равны между собой?

Ответ. $v = c/\sqrt{2}$.

§ 18. Экспериментальные подтверждения гипотезы де Броиля

1. Интерференция электронов при отражении от кристаллов была обнаружена, но не понята еще до появления гипотезы де Броиля. Производя опыты по рассеянию электронов тонкими

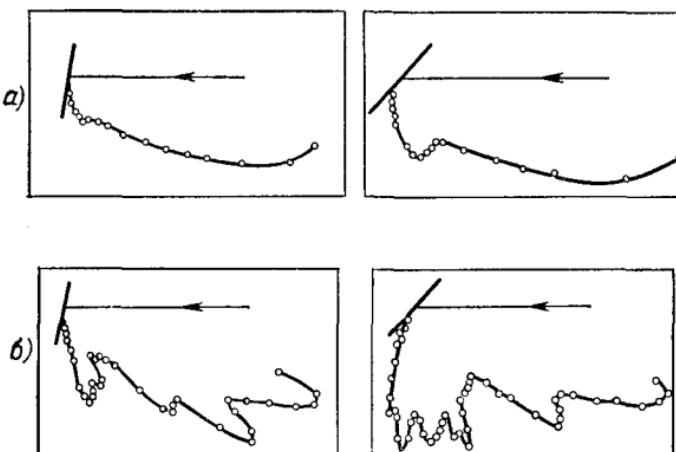


Рис. 28

металлическими фольгами в 1921—1923 гг., Дэвиссон (1881—1958) и Кэнсман наблюдали определенно выраженную зависимость интенсивности рассеянного пучка от угла рассеяния. Положение и величина получающихся максимумов на кривой рассеяния существенно зависели от скорости электронов. В одном из опытов, в котором электроны рассеивались никелевой пластинкой, стеклянный прибор лопнул и пластина окислилась. После длительного прокаливания пластины в вакууме и атмосфере водорода произошла перекристаллизация с образованием некоторого количества крупных кристаллов. При повторении опыта по рассеянию электронов с этой пластинацией кривая рассеяния резко изменилась: количество максимумов сильно возросло, а сами максимумы сделались значительно более отчетливыми. На рис. 28 приведены полярные диаграммы рассеяния электронов до прокаливания пластины (a) и после

прокаливания (б). На этих диаграммах вдоль радиусов-векторов отложены отрезки, пропорциональные интенсивности рассеяния электронов в соответствующих направлениях.

Происхождение максимумов и минимумов на кривых рассеяния долгое время оставалось непонятным, пока их не истолковали как результат интерференционного отражения волн де Броиля от соответствующих атомных плоскостей крупных кристаллов, образовавшихся в результате перекристаллизации. Это истолкование было подтверждено в 1927 г. опытами Дэвиссона и Джермера (1896—1971). На этих опытах была открыта дифракция электронов. С них началось систематическое исследование этого явления.

2. В опытах Дэвиссона и Джермера прежде всего использовался метод Л. Брэгга (1890—1971), но применительно не к рентгеновским лучам, а к волнам де Броиля. Параллельный пучок электронов одинаковой скорости, создаваемый «электронной пушкой» А (рис. 29), направлялся на монокристалл

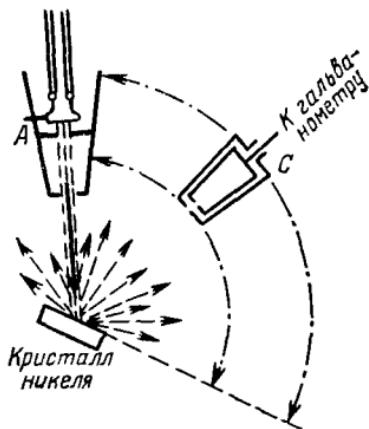


Рис. 29

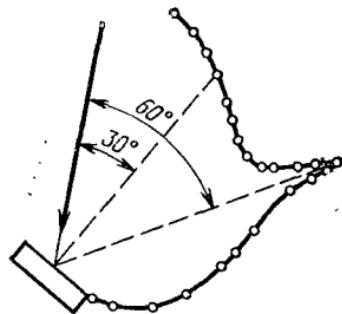


Рис. 30

никеля. Рассеянные электроны улавливались коллектором С, соединенным с гальванометром. Коллектор можно было устанавливать под любым углом к направлению падающего пучка, вращая его все время в одной плоскости (плоскости рисунка). По показанию гальванометра можно было судить об интенсивности пучков электронов, рассеянных в различных направлениях. Типичная полярная диаграмма интенсивности рассеяния электронов представлена на рис. 30. На ней имеется резко выраженный максимум, соответствующий зеркальному отражению электронов, когда угол падения равен углу отражения. Тот же опыт, повторенный с поликристаллической пластинкой никеля, состоящей из множества мельчайших беспорядочно ориентированных кристалликов, не обнаружил никакого преимущественного направления при отражении электронов.

В опытах Дэвиссона и Джермера гипотеза де Бройля была подвергнута и количественной проверке. Как известно, отражение рентгеновских лучей от кристаллов носит *интерференционный характер* (см. т. IV, § 61). От различных параллельных атомных плоскостей кристалла исходят волны, как бы испытавшие зеркальное отражение на каждой из этих плоскостей. Если выполнено условие Брэгга — Вульфа

$$2d \sin \phi = m\lambda, \quad (18.1)$$

где ϕ — угол скольжения, d — межплоскостное расстояние, $m = 1, 2, 3, \dots$, то эти волны при интерференции усиливают друг друга. В результате и возникает отраженная волна. Необходимым условием такой трактовки отражения является выполнение неравенства $m\lambda/(2d) < 1$, т. е. малость длины волны. Такое условие выполняется и в случае волн де Бройля при ускоряющем напряжении в десятки и сотни вольт. Поэтому, даже не зная детально самого механизма отражения волн де Бройля, можно ожидать, что оно также интерференционное, и по этой причине условие (18.1) должно выполняться и для волн де Бройля¹⁾.

В случае монохроматических рентгеновских лучей длину волны λ во время опыта сохраняют постоянной. На опыте меняют угол скольжения ϕ и замечают, при каком значении ϕ наступает интерференционное отражение. В случае волн де Бройля значительно удобнее во время опыта угол ϕ сохранять неизменным, добиваясь интерференционного отражения путем изменения ускоряющего напряжения, т. е. длины дебройлевской волны λ . Так и поступили экспериментаторы.

По теории максимумы отражения должны появиться только при тех значениях λ , которые получаются по формуле (18.1) при целых значениях m . Подставляя в эту формулу значение λ из (17.16), получим для нерелятивистских электронов

$$\sqrt{V} = \frac{1,226}{2d \sin \phi}. \quad (18.2)$$

Здесь V выражено в вольтах, а d — в нанометрах. На рис. 31 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера с монокристаллом никеля при $\phi = 80^\circ$, $d = 0,203$ нм. По оси абсцисс отложено значение \sqrt{V} , а по оси ординат — относительная интенсивность отражения. На том же рисунке стрелками показано положение максимумов, найденное по формуле (18.2).

¹⁾ В сущности, отражение и рассеяние длинных волн (длина волны которых велика по сравнению с межмолекулярными и межатомными расстояниями) также можно рассматривать как интерференционное. Роль атомных плоскостей в этих случаях играют какие-то параллельные и равноотстоящие слои. Но эти слои являются макроскопическими (см. т. IV, § 66, 99), а не мноатомными.

Ождалось, что максимумы должны быть равноотстоящими, а расстояние между ними должно составлять $3,06 \text{ B}^{1/2}$. Все это подтвердилось на опыте, но только при больших значениях m ($m = 6, 7, 8$). При малых m получились систематические отступления от формулы (18.2).

3. Причина указанного расхождения была выяснена Бете (р. 1906), который показал, что электронным волнам де Броиля

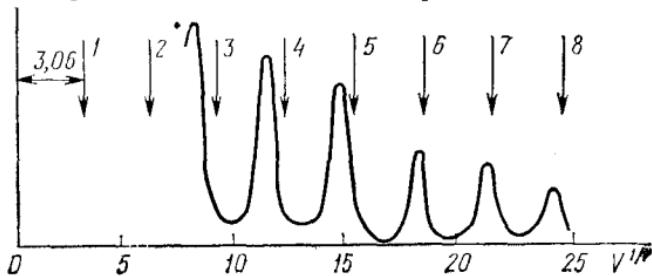


Рис. 31

в кристалле надо приписать показатель преломления, больший показателя преломления их в вакууме. В самом деле, положительно заряженные ионы кристаллической решетки металла и отрицательные электроны между ними пространственно не совпадают. Поэтому в металле существует электрическое поле, потенциал которого периодически меняется от точки к точке. При грубом рассмотрении его можно заменить постоянным потенциалом V_0 , который получается из истинного потенциала путем усреднения его по пространству. Такой усредненный потенциал V_0 называется *внутренним потенциалом* металла. Если потенциал внешнего пространства принять равным нулю, то величина V_0 должна быть положительна, чтобы электроны могли удерживаться внутри металла. Действительно, в этом случае потенциальная энергия электрона внутри металла будет отрицательной — электрон как бы будет находиться в потенциальной яме постоянной глубины V_0 , на стенках которой потенциал скачкообразно меняется от нуля снаружи до постоянного значения V_0 . Наличием внутреннего потенциала металла и можно объяснить увеличение показателя преломления при переходе из вакуума в металл.

Действительно, пусть наружный электрон падает на металл. Если он прошел ускоряющий потенциал V , то его скорость будет $v_1 \sim \sqrt{V}$. В металле скорость этого электрона возрастет до $v_2 \sim \sqrt{V + V_0}$. Поэтому при входе в металл траектория электрона и связанная с ним волна де Броиля должны испытать преломление. Согласно (17.13) относительный показатель преломления металла для этого процесса будет

$$\mu_{21} = v_2/v_1 = \sqrt{1 + V_0/V}. \quad (18.3)$$

Индекс 21 ради краткости опустим, т. е. будем пользоваться здесь обозначением $\mu \equiv \mu_{21}$ (не путать с «абсолютным» показателем преломления).

С учетом преломления электронных волн де Броиля условие Брэгга — Вульфа (18.1) следует писать в виде

$$2d\mu \cos \psi = m\lambda \quad (18.4)$$

(см. т. IV, §§ 33, 61; потеря полуволны при отражении здесь не возникает). Под ψ здесь понимается угол преломления, тогда как ϕ означает угол скольжения (а не падения). Поэтому закон преломления следует писать в виде

$$\cos \phi / \sin \psi = \mu.$$

Из него находим $\cos \phi = (1/\mu) \sqrt{\mu^2 - \cos^2 \psi}$. Таким образом, условие Брэгга — Вульфа принимает вид

$$2d \sqrt{\mu^2 - \cos^2 \psi} = m\lambda. \quad (18.5)$$

Правильность приведенного объяснения подтверждается расчетами. На опыте при фиксированном угле ϕ измеряются значения ускоряющего потенциала V , при которых получаются брэгговские максимумы различных порядков ($m = 3, 4, 5$). По формуле (17.16) вычисляются соответствующие им длины волн де Броиля. Затем по формуле (18.5) находят показатели преломления μ . Наконец, по формуле (18.3) определяют внутренний потенциал V_0 металла. Оказалось, что в пределах ошибок измерений V_0 зависит только от природы металла, но не зависит от порядка отражения m (т. е. от V) и от угла ϕ . Так и должно быть, если только объяснение, данное выше, правильное. Для никеля, например, $V_0 \approx 15$ В. Такого же порядка внутренние потенциалы и для других металлов. Впрочем, для объяснения ряда явлений заменять истинный потенциал в металле усредненным недостаточно. Надо принять во внимание, что истинный потенциал периодически меняется в пространстве. На этой основе построена так называемая *динамическая теория интерференции волн де Броиля*, созданная также Бете в 1928 г.

4. Метод, с помощью которого были получены приведенные результаты, мы назвали *методом Брэгга*. Исследование дифракции рентгеновских лучей производится также двумя другими главными методами: *методом Лауз* (1879—1960) и *методом Дебая — Шерера — Хелла* (см. т. IV, § 61). Такие же методы можно применять и для исследования дифракции волн де Броиля. Дэвиссон и Джермер в 1927 г. применили метод Лауз. В методе Лауз узкий пучок рентгеновских лучей пропускается через монокристалл. Дифрагированные лучи попадают на фотопластинку и фиксируются на ней в виде системы симметрично расположенных пятен. Спектр рентгеновских лучей, как было

выяснено в т. IV, § 61, должен быть обязательно сплошным. При изучении дифракции электронов по методу Лауз надо было бы экспериментировать с пучками электронов с непрерывным разбросом скоростей, что практически невозможно. Скорости электронов, выходящих из электронной пушки, одинаковы или, точнее, непрерывно распределены в узких пределах. Условия Лауз (разумеется, исправленные с учетом показателя преломления электронных волн де Броиля) для пучка электронов определенной скорости, вообще говоря, не выполняются и интерференция не возникает. Поэтому для получения дифракционных максимумов приходится шаг за шагом *непрерывно менять скорость электронов* (путем изменения ускоряющего потенциала, наложенного на пушку) и одновременно положение коллектора.

5. В опыте Дэвиссона и Джермера использовался монокристалл никеля (кристалл кубической системы), сошлифованный

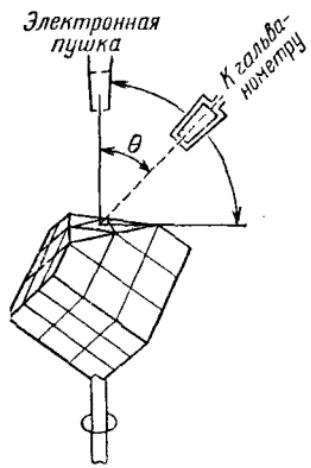


Рис. 32

вдоль плоскости с миллеровскими индексами (111) (см. т. II, § 135). Перпендикулярно к сошлифованной плоскости в вакууме падал пучок электронов, испускаемый электронной пушкой (рис. 32). Для улавливания рассеянных электронов применялся двойной цилиндр Фарадея с надежной кварцевой изоляцией между наружным и внутренним цилиндрами. Внутренний цилиндр был соединен с чувствительным гальванометром. Чтобы устраниТЬ неупруго рассеянные электроны, потерявшие при рассеянии значительную часть своей энергии, на внешний цилиндр накладывался задерживающий (отрицательный) потенциал, величина которого была в десять раз меньше уско-

ряющего потенциала. В результате приемника могли достигать только электроны, отразившиеся упруго, а именно такие, у которых скорость при отражении уменьшилась не более чем на 10 %. Исследовалось количество рассеянных электронов в зависимости от 1) угла рассеяния, 2) скорости электронов в пучке, 3) азимута, т. е. угла поворота кристалла вокруг оси, перпендикулярной к рассеивающей плоскости.

На рис. 33 приведена полярная диаграмма, определяющая зависимость числа рассеянных электронов от угла рассеяния θ при том положении кристалла, которое соответствует рис. 32. В этом положении сошлифованная поверхность кристалла покрыта правильными рядами атомов, перпендикулярными к плоскости падения (плоскости рисунка), расстояние между которыми равно $d = 0,215$ нм. Коллектор мог поворачиваться, оставаясь все время в плоскости падения. Менялся также ускоряю-

щий потенциал. При угле $\theta = 50^\circ$ и различных ускоряющих напряжениях наблюдался максимум, но своего полного развития он достигал при ускоряющем напряжении 54 В ($\lambda = 0,167$ нм).

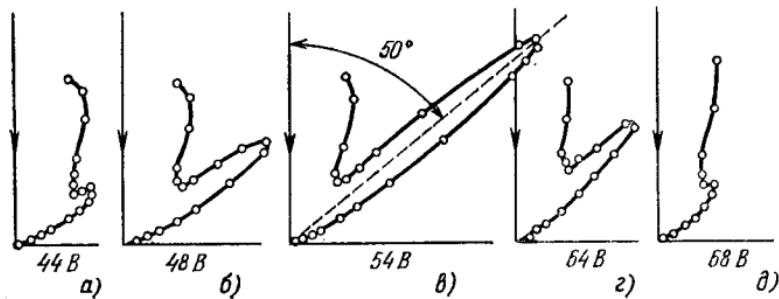


Рис. 33

Его можно истолковать как дифракционный максимум первого порядка от плоской дифракционной решетки с периодом $d = 0,215$ нм. В самом деле, вычисление угла θ по формуле $d \sin \theta = \lambda$ приводит к результату $\theta = 51^\circ$, что хорошо согласуется с экспериментом.

На опыте производились также измерения числа рассеянных электронов при неизменном положении коллектора и постоянстве угла θ , но при различных азимутах кристалла. Иначе говоря, кристалл мог поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной кшлифованной плоскости. Результаты таких измерений изображены графически на рис. 34 для углов $\theta = 44^\circ$ и $\theta = 50^\circ$ и соответствующих им ускоряющих напряжений. Большая часть максимумов на этих рисунках отвечает пространственной интерференции, т. е. взаимной интерференции волн, рассеянных атомами пространственной решетки кристалла. При повороте кристалла на 360° кривые трижды повторяются. Это связано с тем, что перпендикуляр к отражающей плоскости (111) является поворотной осью кристалла третьего порядка. Для полного количественного

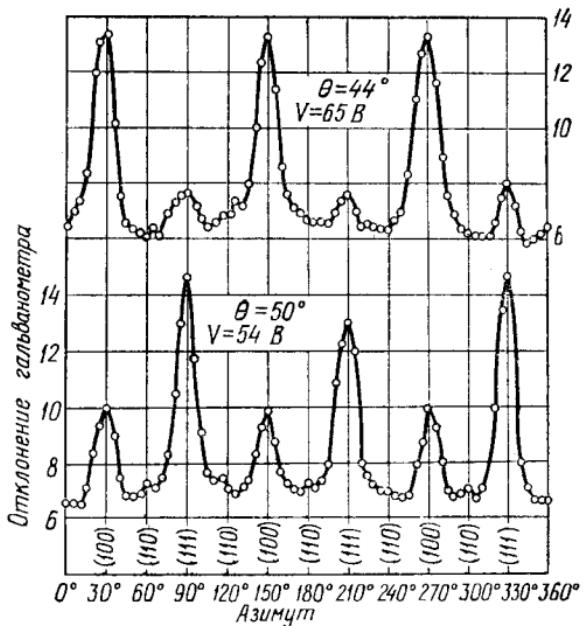


Рис. 34

согласия с теорией необходимо было учесть показатель преломления кристалла. Небольшое число максимумов соответствует интерференционному усилию волн, рассеянных атомами, адсорбированными в поверхностном слое кристалла. Этим объясняется, почему на нижней половине рис. 34 из трех больших максимумов средний несколько ниже двух крайних.

6. Исследование дифракции электронов методом Дебая — Шерера — Хелла производилось, начиная с 1928 г., Д. П. Томсоном (1892—1975), П. С. Тартаковским (1895—1939) и некоторыми другими физиками. Томсон пропускал тонкий монохроматический пучок быстрых электронов (ускоряющий потенциал

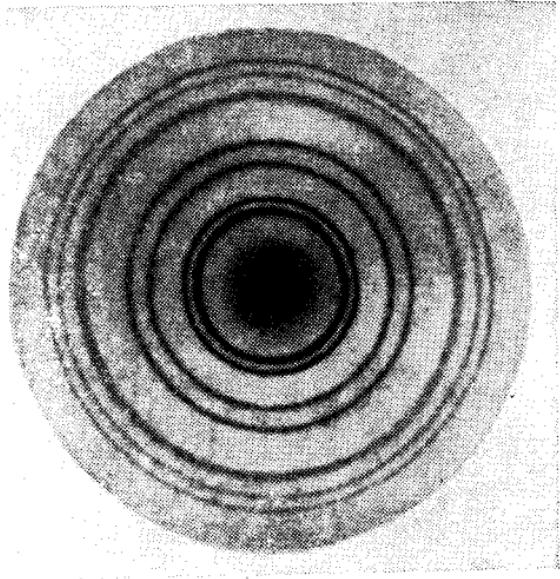


Рис. 35

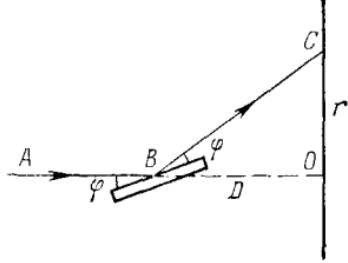


Рис. 36

от 17,5 до 56,5 кВ, соответствующие длины волн, вычисленные по релятивистской формуле (17.16а), от 0,092 до 0,052 нм) сквозь поликристаллическую фольгу толщиной $\sim 10^{-5}$ см. (Использование быстрых электронов связано с тем, что более медленные электроны сильно поглощаются фольгой.) На фотопластинке, поставленной за фольгой, получилось центральное пятно, окруженное дифракционными кольцами. На рис. 35 воспроизведена дифракционная картина, полученная описанным методом с золотой фольгой. Очень простым опытом Томсон показал, что дифракционная картина образовывалась самими рассеянными электронами, а не вторичными рентгеновскими лучами, возбуждаемыми ими: при включении магнитного поля вся дифракционная картина смешалась и искалась. Этого, ко-

нечно, не должно было бы быть, если бы картина возникала в результате дифракции рентгеновских лучей.

Происхождение дифракционных колец в случае электронной дифракции — такое же, как и в случае дифракции рентгеновских лучей (см. т. IV, § 61). Поликристаллическая фольга, пронизываемая электронным лучом, состоит из множества мельчайших ($\sim 10^{-6}$ см) беспорядочно ориентированных кристалликов. Как уже указывалось выше, электронный луч в методе Дебая — Шерера — Хелла должен быть монохроматическим. Но при фиксированной длине волны λ среди множества кристалликов найдутся такие, при отражении от которых выполняется условие Брэгга — Вульфа $2d \sin \phi = m\lambda$ (рис. 36), где ϕ — угол скольжения, а d — межплоскостное расстояние. (Ради простоты мы отвлеклись от усложнения, связанного с преломлением электронных лучей. Это обстоятельство легко учесть.) Статистически совокупность таких кристалликов обладает симметрией вращения вокруг направления падающего луча ABO . Поэтому точки C на фотопластинке, куда попадают соответствующие лучи и вызывают их почернение, должны располагаться вдоль колец с центром в O . Найдем связь между радиусом кольца r и длиной волны λ . При малых углах скольжения

$$\sin \phi \approx \phi = m\lambda/2d = r/2D,$$

где D — расстояние от фольги до фотопластинки. Таким образом, должно выполняться соотношение

$$r/\lambda = \text{const.} \quad (18.6)$$

Оно будет справедливо и при учете преломления. Если воспользоваться формулой (17.16) (для медленных электронов) или (17.16а) (для быстрых электронов), то (18.6) преобразуется в соотношения между r и V . Такие соотношения подтвердились на опыте.

Другое количественное доказательство дифракции электронов в кристаллах получится, если сравнить электронограмму кристалла с рентгенограммой того же кристалла. С их помощью можно вычислить постоянную кристаллической решетки. Оказалось, что эти различные методы приводят к одинаковым значениям.

Аналогичные исследования дифракции электронов по методу Дебая — Шерера — Хелла производились П. С. Тартаковским. Он пользовался менее быстрыми электронами (ускоряющий потенциал до 1700 В, $\lambda > 0,297$ нм) и алюминиевой фольгой. Исследования велись при постоянном угле рассеяния. При изменении скорости электронов наблюдался ряд максимумов, для которых выполнялось условие Брэгга — Вульфа.

7. Дифракция электронов наблюдалась также на отдельных атомах и молекулах. Не останавливаясь подробно на этом

вопросе, ограничимся замечанием, что еще в 1920 г. Рамзауэр (1879—1955) открыл явление, названное его именем. Оно состоит в аномальном увеличении проницаемости некоторых газов для весьма медленных электронов. Иными словами, полное эффективное сечение атома (см. § 9, а также т. II, § 87) по отношению к проходящему через газ пучку электронов становится аномально малым при уменьшении их скорости. Явление особенно отчетливо выражено для благородных газов: аргона, криптона и ксенона. С классической точки зрения (см. § 9) эффективное сечение атома должно было бы монотонно падать с увеличением скорости электронов. Напротив, опыт показывает, что для аргона, криптона и ксенона оно имеет глубокий минимум при ускоряющем напряжении $\approx 0,6$ В. По обе стороны от указанного минимума эффективное сечение резко возрастает, достигая максимума при 6 (ксенон), 11 (криpton) и 13 В (аргон). Это объясняется интерференционными ослаблениями и усилениями волн де Броиля при прохождении их через электрическое поле внутри атома. Грубо говоря, влияние такого поля сводится к действию неоднородной среды, показатель преломления которой внутри атома непрерывно меняется от точки к точке.

8. До сих пор говорилось о дифракции электронов. Атомы и молекулы также претерпевают дифракцию. Как показал Штерн (1888—1969), для тяжелых атомов, когда длина волны де Броиля $\lambda = h/mv$ очень мала, дифракционная картина либо совсем не получается, либо получается весьма расплывчатой. Но для легких атомов и молекул (H_2 , He) наблюдаются весьма четкие дифракционные картины, с большой точностью подчиняющиеся формуле $\lambda = h/mv$. Как видно из формул (17.18) и (17.19), для молекул водорода и атомов гелия средняя длина волны при комнатной температуре порядка 0,1 нм, т. е. того же порядка, что и постоянная кристаллической решетки. Однако эти частицы обладают тепловым разбросом скоростей. Для получения четкой дифракционной картины их предварительно необходимо монохроматизировать. Подходящий селектор скоростей молекул схематически изображен на рис. 37. Это два диска, наложенные на общую ось, с одинаковыми, но повернутыми одна относительно другой щелями. Диски могут приводиться во вращение вокруг этой оси. На диски направляется пучок атомов или молекул параллельно оси вращения. Селектор в принципе работает так же, как зубчатое колесо в известном методе Физо (1819—1896) измерения скорости света. В отношении дифракционных картин, получаемых с атомарными и молекулярными пучками, заметим, что эти пучки не могут проникать в глубь кристаллов. Кристаллы действуют на них как плоские двухмерные отражательные решетки. На рис. 38 приведена картина дифракции атомов гелия от кристалла фтори-

стого лития, т. е. угловое распределение дифрагированных атомов.

9. Остановимся еще кратко на дифракции нейтронов. Нейtron — нейтральная элементарная частица, масса которой почти точно равна массе протона. Благодаря отсутствию электрического заряда он взаимодействует только с ядрами атомов — посредством ядерных сил. На электроны атомных оболочек, а следовательно и на фотопластинку, нейtron не действует. Чтобы тем не менее применить фотопластинку, фотослой покрывают индиевой фольгой, в которой в местах попадания нейтронов происходят ядерные реакции с выделением электронов и γ -квантов, действующих на фотоэмulsionю. Для получения дифракционной

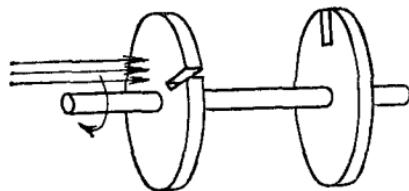


Рис. 37

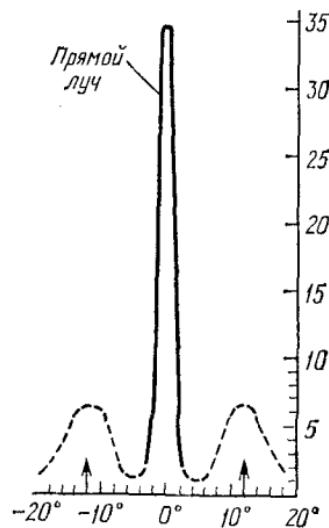


Рис. 38

картины (нейтронограммы) по методу Лауз «белый» пучок тепловых нейтронов от ядерного реактора направляют на крупный монокристалл, в котором и дифрагируют нейтроны.

На рис. 39 приведена нейтронограмма, полученная при прохождении пучка нейтронов через монокристалл NaCl . Помимо центрального пятна, получилась система симметрично расположенных пятен, соответствующая поворотной оси четвертого порядка кристалла NaCl . Привлекает внимание изолированность пятен. Это, как было выяснено в т. IV, § 61, связано с тем, что фотопластинка поставлена не в фраунгоферовой области дифракции, а близко от кристалла — в области применимости геометрической оптики, — но все же достаточно далеко, чтобы

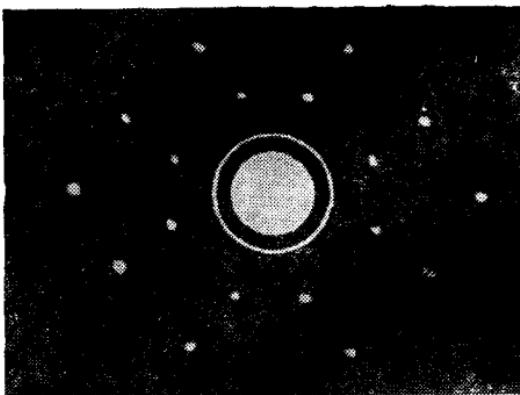


Рис. 39

отдельные пучки, на которые разделяется в кристалле падающая волна, уже успели разойтись.

Резюмируя, можно сказать, что волновые свойства частиц не только доказаны экспериментально, но и получили обширные научно-технические применения (электронография, нейtronография и пр.).

ЗАДАЧА

На селектор скоростей (рис. 37) из печи направлен пучок атомов или молекул, скорости которых в печи распределены по закону Максвелла. Селектор выделяет пучок частиц, абсолютные скорости которых заключены в интервале v , $v + dv$ постоянной ширины dv . При каком значении v (выделяемом скоростью вращения дисков) через селектор пройдет максимальное число частиц?

Ответ. $v^2 = \frac{3}{2}kT/m$, т. е. v должно быть средней квадратичной скоростью.

§ 19. Статистическая интерпретация волн де Бройля и волновой функции

1. Каков же физический смысл волн де Бройля и какова их связь с частицами вещества?

Одна из идей, которой некоторое время придерживался Шредингер, а затем быстро отказался от нее, состоит в следующем. Никакого дуализма волн и частиц в действительности не существует. Существуют только волны. Частицы же представляют собой *суперпозиции волн*. Дело в том, что в силу математической теоремы Фурье (1768—1830) из волн различных частот и направлений всегда можно составить *волновой пакет*, т. е. такое волновое образование, что при наложении в определенный момент времени волны будут усиливать друг друга в какой-то малой области пространства, а вне этой области произойдет их полное гашение. *Такой волновой пакет и есть частица*. Интенсивность волн де Бройля рассматривается как величина, пропорциональная плотности среды, из которой образуется частица. Казалось, что подтверждением такой точки зрения служит то обстоятельство, что центр волнового пакета, подобно центру группы волн, должен в вакууме распространяться с групповой скоростью. А согласно формуле (17.8) групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

Однако волновой пакет не может вести себя как частица сколь угодно длительное время. Причина этого в том, что даже в вакууме волны де Бройля обладают *дисперсией*. Действительно, связь между импульсом частицы p и ее энергией \mathcal{E} выражается формулой

$$(\mathcal{E}/c)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2. \quad (19.1)$$

Подставив в нее значения \mathcal{E} и p из формул (17.2) и (17.3), получим закон дисперсии волн де Бройля

$$(\hbar\omega/c)^2 - (\hbar k)^2 = m_0 c^2. \quad (19.2)$$