

отдельные пучки, на которые разделяется в кристалле падающая волна, уже успели разойтись.

Резюмируя, можно сказать, что волновые свойства частиц не только доказаны экспериментально, но и получили обширные научно-технические применения (электронография, нейtronография и пр.).

ЗАДАЧА

На селектор скоростей (рис. 37) из печи направлен пучок атомов или молекул, скорости которых в печи распределены по закону Максвелла. Селектор выделяет пучок частиц, абсолютные скорости которых заключены в интервале v , $v + dv$ постоянной ширины dv . При каком значении v (выделяемом скоростью вращения дисков) через селектор пройдет максимальное число частиц?

Ответ. $v^2 = \frac{3}{2}kT/m$, т. е. v должно быть средней квадратичной скоростью.

§ 19. Статистическая интерпретация волн де Бройля и волновой функции

1. Каков же физический смысл волн де Бройля и какова их связь с частицами вещества?

Одна из идей, которой некоторое время придерживался Шредингер, а затем быстро отказался от нее, состоит в следующем. Никакого дуализма волн и частиц в действительности не существует. Существуют только волны. Частицы же представляют собой *суперпозиции волн*. Дело в том, что в силу математической теоремы Фурье (1768—1830) из волн различных частот и направлений всегда можно составить *волновой пакет*, т. е. такое волновое образование, что при наложении в определенный момент времени волны будут усиливать друг друга в какой-то малой области пространства, а вне этой области произойдет их полное гашение. *Такой волновой пакет и есть частица*. Интенсивность волн де Бройля рассматривается как величина, пропорциональная плотности среды, из которой образуется частица. Казалось, что подтверждением такой точки зрения служит то обстоятельство, что центр волнового пакета, подобно центру группы волн, должен в вакууме распространяться с групповой скоростью. А согласно формуле (17.8) групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

Однако волновой пакет не может вести себя как частица сколь угодно длительное время. Причина этого в том, что даже в вакууме волны де Бройля обладают *дисперсией*. Действительно, связь между импульсом частицы p и ее энергией \mathcal{E} выражается формулой

$$(\mathcal{E}/c)^2 - p^2 = (m_0 c^2)^2. \quad (19.1)$$

Подставив в нее значения \mathcal{E} и p из формул (17.2) и (17.3), получим закон дисперсии волн де Бройля

$$(\hbar\omega/c)^2 - (\hbar k)^2 = m_0 c^2. \quad (19.2)$$

Из него видно, что фазовая скорость волн де Броиля $v_\phi = \omega/k$ зависит от частоты ω , — в этом и состоит дисперсия. Допустим теперь, что в какой-то момент времени, скажем $t = 0$, волны де Броиля усиливают друг друга в некоторой малой области пространства, а в остальном пространстве волновое поле обращается в нуль. Как будет эволюционировать такой волновой пакет во времени? Монохроматические волны разных частот, из которых образован пакет, будут расходиться с различными фазовыми скоростями. Это приведет к деформации, расплыванию и в конце концов к *распаду* первоначального волнового пакета. Таким образом, частица, если бы она представляла волновое образование, была бы *неустойчива* и быстро распадалась бы. Это ни в какой мере не соответствует действительности. Таким образом, *частица не может быть волновым пакетом, образованным из волн де Броиля*.

2. Нельзя принять и противоположную точку зрения: первичными являются *частицы*, а волны представляют их *образования*, т. е. возникают в среде, состоящей из частиц, подобно звуку, распространяющемуся в воздухе. Действительно, такая среда должна быть достаточно плотной, ибо о волнах в среде частиц имеет смысл говорить лишь тогда, когда среднее расстояние между частицами очень мало по сравнению с длиной волны. А в типичных случаях, как мы видели, для волн де Броиля это условие не выполняется.

Но если бы даже мы преодолели это затруднение, то все же указанная точка зрения должна быть отвергнута. В самом деле, она означает, что волновые свойства присущи системам многих частиц, а не отдельным частицам. Между тем волновые, интерференционные свойства частиц не исчезают и при малых интенсивностях падающих пучков. Это было доказано прямыми опытами Бибермана, Сушкина и Фабриканта (р. 1907) с электронами и Яноши (1912—1978) с фотонами.

В опытах Бибермана, Сушкина и Фабриканта применялись столь слабые пучки электронов, что средний промежуток времени между двумя последовательными прохождениями электрона через дифракционную систему был примерно в 30 000 раз больше времени, затрачиваемого одним электроном на прохождение всего прибора. При таких условиях взаимодействие между электронами, конечно, не играло никакой роли. Между тем при достаточно длительной экспозиции возникала дифракционная картина, ничем не отличающаяся от картины, получаемой при короткой экспозиции с пучками электронов, интенсивность которых была примерно в 10^7 раз больше. Важно только, что в обоих случаях общее число электронов, попавших на фотопластинку, было одинаково. Это показывает, что и *отдельные частицы обладают волновыми свойствами*. Косвенным доказательством этого является также то, что волновые свойства

проявляют электроны атомных оболочек, например единственный электрон атома водорода, когда о среде, образованной электронами, говорить не приходится.

3. Приведенные две попытки физического толкования волн де Броиля являются чисто гипотетическими. В свете экспериментальных фактов обе они оказались несостоятельными. Мы не намерены в дальнейшем идти по пути гипотез, а предпочитаем более надежный метод — *метод принципов*. Допустим, что пучок частиц (для определенности будем говорить об электронах) падает на какое-либо дифракционное устройство, например кристалл. Как выяснено выше, дифракция свойственна и волнам де Броиля, сопутствующим только одной частице. Поэтому можно предположить, что падающий пучок состоит всего из одного электрона. При прохождении соответствующей электронной волны де Броиля через кристалл она разбивается на несколько дифракционных пучков. Нельзя допустить, что в каждом из таких пучков находится какая-то доля электрона. Электрон действует всегда как целое и никогда не обнаруживается часть электрона, — в этом проявляется атомизм, свойственный микромиру. Допустим, что на пути одного из дифрагированных пучков поставлен счетчик для улавливания электронов. Если счетчик срабатывает, то он всегда обнаруживает *целый* электрон, а отнюдь не его часть. Из этого нельзя заключить, что до обнаружения электрон находился только в одном рассматриваемом пучке, а потому все остальные дифрагированные пучки никакой роли не играли — их просто не существовало. Такая точка зрения означала бы, что электрон проходит через экспериментальное устройство как материальная точка классической механики. Это несовместимо с явлениями интерференции и дифракции электронов. Если повторить тот же опыт с другим электроном, то электрон обнаружится также в одном из дифрагированных пучков, но, вообще говоря, не в том же самом. Подобные трудности вынудили Борна предложить *статистическую интерпретацию* волн де Броиля, позволяющую сочтать атомизм частиц с их волновыми свойствами.

4. Согласно статистической интерпретации волны де Броиля следует рассматривать как *волны вероятности*. Более определенно: *интенсивность волны де Броиля в каком-либо месте пространства пропорциональна вероятности обнаружить частицу в этом месте*. Но статистические или вероятностные свойства частиц могут быть установлены на опыте не с одной частицей, а лишь со *многими частицами* или только с одной частицей, если опыт при определенных условиях *повторен многократно*. Говорить о статистике и вероятности имеет смысл лишь по отношению к определенной совокупности элементов, к которым эти понятия относятся. Это может быть либо совокупность многих одновременно наблюдаемых элементов, либо один элемент, мно-

гократно наблюдаемый в последовательные моменты времени. Такие совокупности элементов в квантовой механике называются *квантовыми ансамблями*. *Квантовый ансамбль*, и в этом состоит одно из основных положений квантовой механики, реализуется путем задания каких-то макроскопических параметров. Это, конечно, не означает, что волновые свойства присущи ансамблям частиц, а не самим частицам. Ансамбли необходимы только для обнаружения таких свойств.

Статистическая интерпретация явлений появилась впервые в статистической физике. Однако в основе классической статистической физики лежат динамические законы, допускающие в принципе возможность точного предсказания поведения во времени каждой индивидуальной микрочастицы системы. Для этого нужно только знать начальные условия для всех микрочастиц и силы взаимодействия между ними. Так, поведение газа в состоянии покоя макроскопически определяется его температурой, давлением и объемом. Но это поведение можно было бы в принципе описать положениями и скоростями каждой молекулы в каждый момент времени. По отношению к макроскопическому описанию положения и скорости молекул газа играют роль *скрытых параметров*, т. е. величин, не проявляющихся макроскопически. Можно было бы думать, что и в основе статистического описания, даваемого квантовой механикой, лежат также какие-то неизвестные динамические законы, управляющие поведением неизвестных скрытых параметров, более тонко и детально определяющих состояние систем, чем это делается на современном уровне. Такая точка зрения действительно существует. Но она пока что не привела ни к каким положительным результатам. А потому вопрос о скрытых параметрах мы оставим в стороне и ограничимся статистическим описанием, которое дает современная квантовая механика. Существенно заметить, что такое описание достаточно для предсказания и интерпретации экспериментальных результатов, по крайней мере на современном уровне.

5. Как со статистической точки зрения объясняется дифракция частиц, например электронов? Перед попаданием на дифракционное устройство электроны проходят определенную ускоряющую разность потенциалов, которой соответствует одно и то же значение длины волны де Броиля. Ускоряющий потенциал и является тем макроскопическим параметром, который выделяет квантовый ансамбль частиц. Пусть регистрация электронов производится фотопластинкой. В какое место фотопластинки попадет индивидуальный электрон, с достоверностью предсказать невозможно; это можно сделать только с той или иной степенью вероятности. Вероятность попадания электрона в то или иное место фотопластинки пропорциональна интенсивности волны де Броиля в этом месте. Отдельный электрон

оставляет на фотопластинке (после ее проявления) пятнышко. Если электронов мало, то фотопластинка будет напоминать мишень, простреленную небольшим количеством пуль. В расположении пятнышек на фотопластинке не обнаружится никакой закономерности. Закономерность выявится статистически, когда на пластинку попадет очень много электронов. В этом случае они преимущественно попадут в те места фотопластинки, где должны получиться дифракционные максимумы волн де Броиля. Совокупность соответствующих пятнышек и есть дифракционная картина, получающаяся на опыте. Пока электростатическое отталкивание между электронами несущественно, дифракционная картина получится одной и той же независимо от того, образуется ли она электронами, последовательно проходящими по одному через прибор, или сразу интенсивным пучком одинаково ускоренных электронов, в котором содержится то же число частиц.

6. Символический характер волн де Броиля проявляется, между прочим, в том, что функция (17.1), представляющая плоскую волну де Броиля $\Psi(r, t)$, существенно комплексна. С комплексными выражениями такого типа мы имели дело и в классической физике, но тогда физический смысл мы связывали только с вещественными частями этих выражений. Последние можно было и не дополнять соответствующими мнимыми частями. Это делалось только в целях сокращения математических преобразований и удобства интерпретации окончательных результатов. Не так обстоит дело в квантовой механике. Здесь функция $\Psi(r, t)$ принципиально комплексна. Все физические величины, имеющие реальный физический смысл, выражаются через всю комплексную функцию $\Psi(r, t)$, а не только через ее вещественную часть. Конечно, можно было бы совсем избежать применения комплексных функций. Но тогда для изображения волны де Броиля потребовалась бы не одна, а две вещественные функции. Одна из них представляла бы вещественную часть, а другая — коэффициент при мнимой части комплексной функции Ψ . Но это только усложнило бы дело.

Теперь вероятность обнаружить частицу в каком-либо месте пространства можно представить квадратом модуля функции Ψ в том же месте, т. е.

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi.$$

В случае плоской волны де Броиля (17.1) этот квадрат модуля равен

$$\Psi^*(r, t) \Psi(r, t) = \Psi_0^* \Psi_0 = \text{const},$$

т. е. равновероятно обнаружить частицу в любом месте пространства. Всякий другой результат для равномерно движущейся частицы в течение бесконечного времени несовместим

с однородностью пространства. Но он не получился бы, если бы вместо комплексного выражения (17.1) для волны де Бройля взять вещественное, например \sin или \cos . Это может служить одним из оправданий использования комплексных выражений вместо вещественных. Но будет ли наблюдаться интерференция волн, если каждая из них существенно комплексна? Легко видеть, что да. Действительно, пусть две волны де Бройля представляются выражениями

$$\Psi_1 = e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)}, \quad \Psi_2 = e^{i(\mathbf{k}r - \omega t - \delta(r))},$$

т. е. между обеими волнами существует разность фаз $\delta(r)$. При их наложении получается волна $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Вероятность обнаружить частицу в каком-либо месте пространства будет пропорциональна

$$\begin{aligned} \Psi^* \Psi &= (\Psi_1^* + \Psi_2^*) (\Psi_1 + \Psi_2) = (\Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2) + \\ &+ (\Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2) = 2 + e^{i\delta} + e^{-i\delta} = 2(1 + \cos \delta). \end{aligned}$$

Она содержит интерференционный член $2 \cos \delta(r)$, меняющийся в пространстве от -2 до $+2$, в зависимости от разности фаз $\delta(r)$. Таким образом, интерференция будет наблюдаться.

7. До сих пор говорилось только о плоских волнах де Бройля, представляемых выражением (17.1). Такие волны сопровождают свободное равномерное движение частиц. Необходимо теперь обобщить полученные результаты на случай *произвольных движений частицы в произвольных силовых полях*. В этих случаях полное описание состояния частицы в квантовой механике дается не плоской волной де Бройля, а какой-то более сложной комплексной функцией $\Psi(r, t)$, зависящей от координат и времени. Она называется *волновой функцией*. В частном случае свободного движения частицы волнивая функция переходит в плоскую волну де Бройля (17.1). Сама по себе волнивая функция вводится как некоторый *вспомогательный символ* и не относится к числу непосредственно наблюдаемых величин. Но ее знание позволяет *статистически предсказывать* значения величин, которые получаются экспериментально и потому имеют реальный физический смысл. Эта связь волнивой функции с тем, что наблюдается в действительности, будет раскрываться постепенно по мере дальнейшего изложения. Сейчас же мы ограничимся только одной стороной этого вопроса.

Через волниную функцию определяется *относительная вероятность* обнаружения частицы в различных местах пространства. На этой стадии, когда говорится только об отношениях вероятностей, волнивая функция принципиально определена с точностью до произвольного постоянного множителя. Если во всех точках пространства волниовую функцию умножить на одно и то же постоянное (вообще говоря, комплексное) число, отлич-

ное от нуля, то получится новая волновая функция, описывающая в точности *то же состояние*. Не имеет смысла говорить, что Ψ равна нулю во всех точках пространства, ибо такая «волновая функция» никогда не позволяет заключить об относительной вероятности обнаружения частицы в различных местах пространства. Но неопределенность в определении Ψ можно значительно сузить, если от относительной вероятности перейти к абсолютной. Распорядимся неопределенным множителем в функции Ψ так, чтобы величина $|\Psi|^2 dV$ давала *абсолютную вероятность* обнаружения частицы в элементе объема пространства dV . Тогда $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ будет иметь смысл *плотности вероятности*, которую следует ожидать при попытке обнаружения частицы в пространстве. При этом Ψ будет определена все еще с точностью до произвольного постоянного комплексного множителя, модуль которого, однако, равен единице. При таком определении должно быть выполнено условие *нормировки*

$$\int |\Psi|^2 dV = 1, \quad (19.3)$$

где интеграл берется по всему бесконечному пространству. Оно означает, что во всем пространстве частица будет обнаружена с достоверностью.

Нормировка (19.3) может оказаться невозможной, если интеграл (19.3) расходится. Так будет, например, в случае плоской волны де Броиля, когда вероятность обнаружения частицы одинакова во всех точках пространства. Но такие случаи следует рассматривать как идеализации реальной ситуации, в которой частица не уходит на бесконечность, а вынуждена находиться в ограниченной области пространства. Тогда нормировка (19.3) не вызывает затруднений. Но предельным переходом от нее можно получить рациональную нормировку и в случае частицы, не локализованной в конечной области пространства (см. § 30).

8. Итак, непосредственный физический смысл связывается не с самой функцией Ψ , а с ее *модулем* $\Psi^* \Psi$ (или вообще с какими-то выражениями, билинейными по Ψ^* и Ψ). Почему же в квантовой теории оперируют с волновыми функциями Ψ , а не непосредственно с экспериментально наблюдаемыми величинами $\Psi^* \Psi$? Это необходимо для истолкования волновых свойств вещества — интерференции и дифракции. Здесь дело обстоит совершенно так же, как во всякой волновой теории. Она (во всяком случае в линейном приближении) принимает справедливость *принципа суперпозиции самих волновых полей*, а не их интенсивностей и, таким образом, достигает включения в теорию явлений интерференции и дифракции волн. Так и в квантовой механике принимается в качестве одного из основных постулатов *принцип суперпозиции волновых функций*, заключаю-

щийся в следующем. Если $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ — волновые функции, описывающие какие-то два состояния частицы, то всякая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ представляет также волновую функцию той же частицы, описывающую какое-то состояние ее. Найдя Ψ указанным путем, можно в дальнейшем определить и плотность вероятности $\Psi^*\Psi$ в состоянии Ψ .

Оправданием такого принципа суперпозиции является согласие с опытом вытекающих из него следствий. Является ли принцип суперпозиции точным законом природы, или он верен только в линейном приближении, этот вопрос не может считаться выясненным. Мы будем строить дальнейшую теорию в предположении, что принцип суперпозиции выполняется точно.

Подчеркнем особо, хотя это и содержится в изложенном выше, что физический смысл волновой функции Ψ связан не только с ее модулем, но и с ее *фазой*, определяемой мнимой частью этой функции. Если бы речь шла о волновой функции только одного состояния, то можно было бы ограничиться одним только модулем. Но если речь идет о наложении состояний, то происходит их интерференция, а она определяется относительной разностью фаз волновых функций, описывающих эти состояния.

9. В связи с изложенным становится понятным, почему при рассмотрении обычных волн, например электромагнитных, инвариантность фазы волны $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ нами доказывалась (см. т. IV, § 107), тогда как в случае волн де Броиля это не делалось, а частота ω специально подбиралась так, чтобы указанная инвариантность была обеспечена (см. § 17, пункт 2). Дело в том, что доказательство, приведенное в т. IV (§ 107), предполагало возможность счета волн, проходивших мимо наблюдателя. Для волн де Броиля такая возможность исключена, ибо наблюдатель может следить не за самой волной Ψ , а только за плотностью вероятности $\Psi^*\Psi$. Поэтому указанное доказательство к волнам де Броиля неприменимо.

10. Частота волны де Броиля ω и вообще частота волновой функции относятся к *принципиально ненаблюдаемым величинам*. Этим можно воспользоваться, чтобы перейти к квантовой механике в *нерелятивистской форме*. И в классической механике обширная область явлений охватывается в нерелятивистском приближении. То же может быть сделано и в квантовой механике. К тому же здесь переход к релятивистскому рассмотрению осложняется следующим обстоятельством. В сильных полях, когда энергия поля (например, γ -кванта) превосходит $2m_ec^2$, начинается *рождение пар электрон — позитрон*. То же наблюдается в аналогичных случаях и для других частиц. По этой причине *последовательная релятивистская квантовая механика не может быть теорией одного тела (одной частицы)*. Теория

рия одного тела возможна только в нерелятивистском приближении. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся только нерелятивистской квантовой механикой.

В нерелятивистской квантовой механике мы будем по-прежнему пользоваться соотношениями

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad (19.4)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (19.5)$$

Однако собственную энергию частицы m_0c^2 учитывать не будем. Это значит, что, начиная с этого места, мы вводим новую частоту, отличающуюся от прежней частоты на постоянную. Для новой частоты сохраним прежнее обозначение ω . В частности, в случае свободного движения $\mathcal{E} = p^2/2m$, и закон дисперсии записывается в виде

$$\omega = (\hbar/2m) k^2 \quad (19.6)$$

вместо прежнего соотношения (19.2). Это приводит к новому выражению для фазовой скорости волн де Броиля:

$$v_\phi = \omega/k = \hbar k/2m = p/2m = v/2. \quad (19.7)$$

Однако это не может отразиться на физических выводах теории, так как *фазовая скорость, как и сама частота ω волны де Броиля, относится к числу принципиально ненаблюдаемых величин*. Существенно, что физически наблюдаемые величины — плотность вероятности $\Psi^*\Psi$ и групповая скорость (17.8) — при новом выборе частоты остаются неизменными (см. § 17, пункт 3). Остаются неизменными, как это будет видно из дальнейшего, и все величины, доступные измерению на опыте.

11. Остановимся в заключение на общей характеристике всякой количественной физической теории. Такая характеристика особенно существенна при изучении квантовой механики. Как отмечал Л. И. Мандельштам (1879—1944), всякая теория состоит, вообще говоря, из двух дополняющих друг друга частей. Первая часть — это *математический аппарат теории*, т. е. уравнения между различными математическими символами, входящими в теорию. Вторая часть определяет *связь этих символов с природой*, с реальной действительностью. Без второй части теория иллюзорна — это чистая математика, а не естественная наука. Без первой части вообще нет количественной теории. *Только совокупность обеих частей составляет количественную физическую теорию.*

Классические теории всегда начинались со второй части. Смысл символов, которыми оперировала теория, считался известным заранее или устанавливался и уточнялся в процессе ее построения. Таковы были время, длина, масса, сила, электрический заряд, напряженности электрического и магнитного полей и т. д. Правда, точные научные определения соответ-

ствующих понятий иногда бессознательно подменялись наивными представлениями, заимствованными из повседневной жизни. Это приводило к трудностям. Так было, например, с понятиями пространства и времени, критический пересмотр которых привел к теории относительности. Но порядок построения теории всегда оставался прежним — сначала вырабатывались понятия и лишь потом устанавливались соответствующие уравнения. Квантовая механика пошла по другому пути. Сначала были установлены уравнения для каких-то символов (к числу их относится, например, волновая функция), физический смысл которых был совсем не ясен. Лишь потом занялись отысканием связи этих символов с реальной действительностью. Такой путь построения теории хотя и представляется противоестественным, но логически он допустим, если только связь с реальностью полностью установлена. По такому пути приходится идти и нам. Пока что мы связали волновую функцию Ψ с соответствующей плотностью вероятности $\Psi^* \Psi$. Но этим не исчерпывается физическая интерпретация всех понятий и величин, которые пришлось ввести в связи с функцией Ψ .

§ 20. Соотношение неопределенностей

1. В классической механике состояние материальной точки в каждый момент времени характеризуется ее *положением* и *импульсом*. Реальные микрочастицы — электроны, протоны, атомы, молекулы и пр. — более сложные объекты. *Нельзя характеризовать мгновенное состояние микрочастицы точными заданиями ее положения и импульса.* Причина этого в том, что всякая микрочастица проявляет и корпускулярные, и волновые свойства. Нельзя сказать, что в определенной точке пространства длина волны равна λ , если о волновом поле во всех остальных точках пространства ничего не известно. Длина волны есть *характеристика синусоиды*, а синусоида — *бесконечная периодическая кривая*. Если из нее вырезать малый кусочек и удалить все остальные части, то оставшийся кусочек потеряет самое характерное свойство синусоиды — ее периодичность. Для кусочка, малого по сравнению с λ , понятие длины волны не применимо. Ясно, что выражения «длина волны в данной точке пространства x равна λ » или «частота волнового процесса в данный момент времени t равна ω » не имеют никакого смысла — величина λ не является функцией x , а величина ω — функцией t .

С другой стороны, если какое-либо волновое образование занимает ограниченную область пространства, то его всегда можно представить синусоидами. Только одной синусоиды для этого недостаточно. Требуется волновой пакет — суперпозиция множества синусоид различных частот, которые усиливались бы в определенном интервале пространства и взаимно гасили бы