ствующих понятий иногда бессознательно подменялись наивными представлениями, заимствованными из повседневной жизни. Это приводило к трудностям. Так было, например, с понятиями пространства и времени, критический пересмотр которых привел к теории относительности. Но порядок построения теории всегда оставался прежним — сначала вырабатывались понятия и лишь потом устанавливались соответствующие уравнения. Квантовая механика пошла по другому пути. Сначала были установлены уравнения для каких-то символов (к числу их относится, например, волновая функция), физический смысл которых был совсем не ясен. Лишь потом занялись отысканием связи этих символов с реальной действительностью. Такой путь построения теории хотя и представляется противоестественным, но логически он допустим, если только связь с реальностью полностью установлена. По такому пути приходится идти и нам. Пока что мы связали волновую функцию Ψ с соответствующей плотностью вероятности $\Psi^*\Psi$. Но этим не исчерпывается физическая интерпретация всех понятий и величин, которые пришлось ввести в связи с функцией Ψ.

§ 20. Соотношение неопределенностей

1. В классической механике состояние материальной точки в каждый момент времени характеризуется ее *положением* и *импульсом*. Реальные микрочастицы — электроны, протоны, атомы, молекулы и пр. — более сложные объекты. *Нельзя характеризовать мгновенное состояние микрочастицы точными заданиями ее положения и импульса.* Причина этого в том, что всякая микрочастица проявляет и корпускулярные, и волновые свойства. Нельзя сказать, что в определенной точке пространства длина волны равна λ, если о волновом поле во всех остальных точках пространства ничего не известно. Длина волны есть *характеристика синусоиды*, а синусоида — *бесконечная периодическая кривая*. Если из нее вырезать малый кусочек и удалить все остальные части, то оставшийся кусочек потеряет самое характерное свойство синусоиды — ее периодичность. Для кусочка, малого по сравнению с λ, понятие длины волны неприменимо. Ясно, что выражения «длина волны в данной точке пространства x равна λ» или «частота волнового процесса в данный момент времени t равна ω» не имеют никакого смысла — величина λ не является функцией x, а величина ω — функцией t.

С другой стороны, если какое-либо волновое образование занимает ограниченную область пространства, то его всегда можно представить синусоидами. Только одной синусоиды для этого недостаточно. Требуется волновой пакет — суперпозиция множества синусоид различных частот, которые усиливались бы в определенном интервале пространства и взаимно гасили бы

друг друга вне этого интервала. Если длина волнового пакета равна Δx (ради простоты мы ограничиваемся одним измерением), то волновые числа k, необходимые для его образования, не могут занимать как угодно узкий интервал Δk. Минимальная ширина интервала Δk должна примерно удовлетворять соотношению

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 2\pi \tag{20.1}$$

(см. т. IV, § 30). Это — *чисто волновое соотношение*. Из него следует, что в коротком радиосигнале (малое Δx) всегда представлены с заметной интенсивностью монохроматические волны с различными значениями λ. Такие сигналы будут приниматься приемниками, настроенными на различные волны. Если же требуется принимать сигналы, близкие к монохроматическим (малое $\Delta\lambda$), то они по необходимости должны быть длинными (большое Δx).

Напомним, как из элементарных соображений можно прийти к соотношению (20.1). Рассмотрим множество синусоид одинаковых амплитуд, волновые числа которых k последовательно возрастают от синусоиды к синусоиде на одну и ту же величину. В точке x фазы волн меняются от kx до $(k+\Delta k)x$, т. е. на величину $x\Delta k$. Если $x\Delta k = 2\pi$, то в этой точке все синусоиды взаимно гасят друг друга. Найдем ближайшую точку $x+\Delta x$, в которой будет происходить такое гашение. В этой точке разность фаз между крайними синусоидами будет

$$(k+\Delta k)(x+\Delta x) - k(x+\Delta x) = x\,\Delta k + \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi + \Delta x \cdot \Delta k.$$

Ближайшее гашение произойдет, когда $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$. Таким образом, все волновое возмущение разобьется на отрезки одинаковой длины Δx, причем на концах каждого отрезка волновое поле обратится в нуль. Такой результат получился потому, что все синусоиды были взяты с одной и той же амплитудой. Но если воспользоваться синусоидами всевозможных амплитуд, то можно усилить возмущение в пределах только одного отрезка Δx, а вне этого отрезка всюду его погасить. Это следует из математической теоремы Фурье, причем необходимым условием является выполнение соотношения типа (20.1). Именно такой случай мы и будем иметь в виду.

2. Рассмотрим теперь волновой пакет из волн де Бройля, размеры которого и соответствующие пределы волновых чисел удовлетворяют условию (20.1). Согласно статистической интерпретации вероятность обнаружения частицы будет отлична от нуля только в пределах пакета. А чему будет равен импульс частицы? Каждой волне де Бройля с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ соответствует значение импульса $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$. Определенного импульса для всего пакета не существует. Существует набор импульсов, заполняющих интервал от $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ до $\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p} =$

$= \hbar(\boldsymbol{k} + \Delta\boldsymbol{k})$. Неизвестно, какой импульс будет обнаружен в волновом пакете при измерении. В лучшем случае можно указать только его вероятность. При измерении импульс будет обнаружен с той или иной вероятностью между $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p} = \hbar(\boldsymbol{k} + \Delta\boldsymbol{k})$. Поэтому, выражая $\boldsymbol{k}$ через $\boldsymbol{p}$, соотношение (20.1) можно переписать в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant 2\pi\hbar = h. \tag{20.2}$$

Это соотношение называется *соотношением* или *принципом неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса частицы*. Оно определяет допустимый *принципиальный предел неточностей* Δx и Δp, с которыми состояние частицы можно характеризовать классически, т. е. координатой x и импульсом p. Чем точнее x, тем с меньшей точностью возможно характеризовать p, и наоборот. Но соотношение Гейзенберга никоим образом нельзя толковать в том смысле, что частица в каждый момент времени имеет определенные значения x и p, но мы их принципиально не можем узнать с большей точностью, чем это позволяет соотношение неопределенностей (20.2). Такая агностическая точка зрения существовала, но она совсем не соответствует природе изучаемых микрообъектов. Истинный смысл соотношения (20.2) отражает тот факт, что в природе *объективно не существует* состояний частиц с точно определенными значениями обеих переменных x и p.

Принцип неопределенностей был сформулирован Гейзенбергом в 1927 г. и явился важным шагом в интерпретации закономерностей микромира и построении квантовой механики.

В частном случае неопределенности Δp может и не быть ($\Delta p = 0$). Так будет, например, в случае плоской монохроматической волны де Бройля. Но тогда, согласно соотношению неопределенностей, $\Delta x = \infty$, т. е. о месте, где будет локализована частица, ничего сказать нельзя. Она может быть с равной вероятностью обнаружена в любой точке пространства. Напротив, когда $\Delta x = 0$, то $\Delta p = \infty$. В этом случае волновая функция стягивается в точку. При локализации частица будет обнаружена в одной определенной точке (например, начале координат), но об импульсе, который будет найден при локализации, можно высказать только вероятностное утверждение. Можно показать, что в этом случае все значения импульса будут равновероятны.

3. В трехмерном случае классически частица характеризуется тремя прямоугольными координатами x, y, z и сопряженными им импульсами p_x, p_y, p_z. В этом случае соотношения неопределенностей Гейзенберга выражаются тремя неравенствами

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h, \quad \Delta y \cdot \Delta_y p \geqslant h, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant h. \tag{20.3}$$

Никаких ограничений на произведения типа $\Delta x \cdot \Delta p_y$, $\Delta y \cdot \Delta p_z$, которые получаются от умножения неопределенностей координат на неопределенности импульсов, сопряженных с другими координатами, соотношения неопределенностей не накладывают. Величины x и p_y, x и p_z одновременно могут иметь и совершенно точные значения.

4. Соотношению (20.2) можно придать точную количественную форму, которую мы приведем без доказательства. В соотношении (20.2) величины Δx и Δp точно не определены. Но любая волновая функция Ψ позволяет определить *среднее значение координаты* $\bar{x}$, а ее спектральный состав — *среднее значение* $\bar{p}$. Из этих величин находятся отклонения от среднего $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta p = p - \bar{p}$ и средние квадраты этих отклонений $\overline{\Delta x^2}$ и $\overline{\Delta p^2}$. Точное соотношение неопределенностей гласит:

$$\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta p^2} \geqslant \hbar^2/4. \tag{20.4}$$

Как правило, мы не будем пользоваться этим соотношением, так как во всех принципиальных вопросах существенно знать лишь *порядок величины* $\Delta x \cdot \Delta p$, а не ее точное значение.

5. Мы распространим соотношения неопределенностей (20.3) и на случай *макроскопических тел*, хотя в этом случае и не существует никаких опытов, подтверждающих или опровергающих эти соотношения. Единственным оправданием соотношений неопределенностей в этих случаях служит наша уверенность в их универсальности и всеобщности. Поэтому мы поставим вопрос, как сказалось бы соотношение неопределенностей на движении макроскопического тела, если бы это соотношение в рассматриваемом случае было действительно верно? Возьмем маленький шарик с массой $m = 1$ г. Определим положение центра этого шарика с высокой точностью $\Delta x = 10^{-8}$ см, т. е. с точностью до размера атома. Тогда неопределенность импульса шарика будет $\Delta p \sim h/\Delta x \approx 6{,}63 \cdot 10^{-19}$ г·см/с, а неопределенность скорости $\Delta v = \Delta p/m \approx 6{,}63 \cdot 10^{-19}$ см/с. Такая точность недоступна никакому измерению, а потому и отступления от классического движения, вызываемые соотношением неопределенностей, далеко лежат за пределами возможностей эксперимента.

Совсем иначе обстоит дело с движением электрона в атоме. Имеет ли смысл говорить о классическом движении электрона по боровской орбите? Возьмем для определенности атом водорода и первую боровскую орбиту. Чтобы такое движение имело смысл, необходимо, чтобы неопределенность значения радиуса Δr была мала по сравнению с самим радиусом орбиты $r = \hbar^2/(me^2)$. Но в этом случае неопределенность значения радиального импульса будет

$$\Delta p_r \approx h/\Delta r \gg h/r = 2\pi\hbar/r = 2\pi p,$$

что превосходит сам импульс электрона $p = \hbar/r$. Аналогичное справедливо и для других боровских орбит, если только квантовое число не очень велико. При таких условиях представление о движении по классическим орбитам теряет смысл. Поэтому квантовая механика при описании движений электронов в атомах отказалась от понятия траектории — этому понятию здесь реально ничего не соответствует. Так же обстоит дело и с другими элементарными частицами при движении в очень малых областях пространства.

6. Соотношение (20.2) проявляется при всякой попытке измерения точного положения или точного импульса частицы. Оказывается, что уточнение положения частицы сказывается на увеличении неточности в значении импульса, и наоборот. Иллюстрируем это на трех примерах.

Первый пример. Пусть движение электрона описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Электрон в таком состоянии обладает вполне определенным импульсом, но его координата совершенно не определена. Для определения x-координаты электрона на пути волны перпендикулярно к ее распространению ставится непрозрачный экран со щелью ширины d (рис. 40). Пусть координатная плоскость XY расположена в

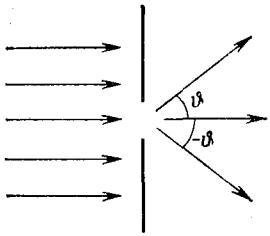

Рис. 40

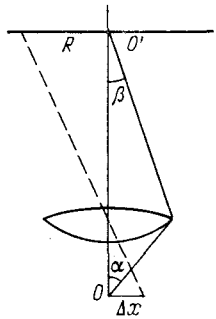

Рис. 41

плоскости экрана, причем ось X направлена перпендикулярно к щели. Если электрон прошел через щель, то в плоскости самой щели координата x будет зафиксирована с точностью $\Delta x \sim d$. Однако в результате дифракции на щели волновая функция электрона Ψ изменится. Она будет иметь максимумы и минимумы. Электрон же может быть обнаружен в любом месте, где $\Psi \neq 0$. Практически все волновое поле будет сосредоточено в пределах центрального максимума нулевого порядка. Его угловая ширина равна 2ϑ, причем $d \sin \vartheta = \lambda$. Этот центральный максимум мы приближенно можем принять за все поле, отбрасывая все его остальные части. В этом приближении после

прохождения через щель неопределенность Δp_x импульса электрона получится порядка $\Delta p_x = p \sin \vartheta$. Умножая это выражение на $\Delta x = d$ и принимая во внимание $d \sin \vartheta = \lambda$ и $p = h/\lambda$, получим $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h$, как и должно быть согласно соотношению Гейзенберга. Чем у́же щель, тем точнее будет измерена координата электрона, но зато потеряется точность в значении его импульса.

Сужая щель до размеров $d < \lambda$, можно сделать неопределенность координаты сколь угодно малой. Однако при $d < \lambda$ волновое поле за щелью перестает быть плоской однородной волной де Бройля. Получается неоднородная волна, быстро затухающая на расстоянии порядка λ и меньше. В этом случае наша оценка Δp неприменима. Однако соотношение неопределенностей, как показывает более точное исследование, остается в силе.

Второй пример (мысленный опыт Гейзенберга с микроскопом). Пусть частица находится под микроскопом (рис. 41). Для определения ее положения она освещается монохроматическим фотоном короткой длины волны λ. По месту попадания фотона на фотопластинку и судят о положении частицы. При освещении пучком света изображением частицы служит дифракционная картина со светлыми и темными кольцами и светлым кружком в центре. Но с одним фотоном дифракционную картину получить нельзя. При рассеянии на электроне фотон с той или иной вероятностью может попасть в любую точку потенциально возможной дифракционной картины, где интенсивность света отлична от нуля. Практически все фотоны могут попасть только в пределы центрального кружка. Интенсивностью остальных колец можно пренебречь. Радиус центрального кружка $R \approx \approx \lambda/\beta$. В этом приближении положение точки попадания фотона в плоскости изображения может быть определено с точностью порядка R. Неточность положения Δx электрона в предметной плоскости найдется из условия синусов Аббе $R\beta = = \Delta x \sin \alpha$, т. е. $\lambda = \Delta x \sin \alpha$. Чем меньше λ, тем точнее определяется положение частицы. Но при рассеянии фотона на электроне последний испытывает отдачу, в результате чего импульс электрона получает неконтролируемое приращение $\Delta p_x \sim \sim (h/\lambda) \sin \alpha$. Чем меньше λ, тем больше это неконтролируемое приращение. Таким образом, при одновременном измерении x и p_x мы приходим к соотношению неопределенности $\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \sim h$.

Третий пример. Рассмотрим измерение скорости движущегося макроскопического тела по допплеровскому смещению частоты при отражении монохроматического света от этого тела.

Пусть телом служит идеально отражающее плоское зеркало, движущееся в направлении нормали к своей поверхности, а свет (фотон) падает нормально на его поверхность. Допустим,

что падающий фотон распространяется в направлении движения зеркала. Тогда отраженный фотон отразится в обратном направлении. На основании законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega_0 + {}^1/_2 m v_0^2 = \hbar\omega + {}^1/_2 m v^2, \tag{20.5}$$

$$\hbar\omega_0/c + m v_0 = -\hbar\omega/c + m v, \tag{20.6}$$

где m — масса тела, v_0 и v — его скорости до и после отражения фотона, ω_0 и ω — частоты падающего и отраженного фотонов. Переписав эти уравнения в виде

$$m\left(v^2 - v_0^2\right) = 2\hbar\left(\omega_0 - \omega\right), \tag{20.7}$$

$$m\left(v - v_0\right) = (\hbar/c)\left(\omega + \omega_0\right), \tag{20.8}$$

почленным делением находим

$$v + v_0 = 2c\left(\omega_0 - \omega\right)/\left(\omega_0 + \omega\right).$$

Массу зеркала m можно считать бесконечно большой по сравнению с массой фотона. Тогда

$$v = v_0 = c\left(\omega_0 - \omega\right)/\left(\omega_0 + \omega\right). \tag{20.9}$$

Измерив частоты ω_0 и ω, можно по этой формуле вычислить скорость зеркала v. Частоту ω_0 можно считать измеренной точно. Тогда ошибка Δv в определении скорости будет определяться неточностью измерения частоты ω. Чтобы измерить ω с точностью $\Delta\omega$, для измерения требуется минимальное время Δt, удовлетворяющее условию $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$. На основании (20.9)

$$\Delta v = -2c\omega_0\Delta\omega/(\omega_0 + \omega)^2 \approx -c\Delta\omega/2\omega_0.$$

Так как моменты отражения фотона известны с ошибкой Δt, то неточность в скорости v поведет к ошибке в определении координаты зеркала

$$\Delta x \sim |\Delta v \cdot \Delta t| \sim (c/2\omega_0)\,|\Delta\omega \cdot \Delta t| \sim \pi c/\omega_0.$$

Но согласно (20.8) при взаимодействии с фотоном зеркало получает неконтролируемое изменение импульса $\Delta p \sim 2\omega_0\hbar/c$. Следовательно, опять получается соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p \sim 2\pi\hbar = h$.

7. Приведенные примеры показывают, что измерения в квантовой области принципиально отличаются от классических измерений. Конечно, и те и другие измерения сопровождаются ошибками. Однако классическая физика считала, что путем улучшения методики и техники измерений ошибки в принципе могут быть сделаны сколь угодно малыми. Напротив, *согласно квантовой физике существует принципиальный предел точности измерений. Он лежит в природе вещей и не может быть превзойден никаким совершенствованием приборов и методов измерений.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга и уста-

навливают один из таких пределов. Взаимодействие между макроскопическим измерительным прибором и микрочастицей во время измерения принципиально нельзя сделать сколь угодно малым. Если измеряется, например, координата частицы, то измерение неизбежно приводит к принципиально неустранимому неконтролируемому искажению первоначального состояния частицы, а следовательно, и к неопределенности в значении импульса при последующем измерении. То же самое происходит, если порядок измерения координаты и импульса частицы поменять местами.

8. Отметим некоторые выводы, вытекающие из соотношения неопределенностей (20.2).

Прежде всего видно, что *состояние, в котором частица находится в полном покое, невозможно.* Далее, в макроскопической физике импульс частицы определяется формулой $p = mv$. Для нахождения скорости v измеряют координаты частицы x_1 и x_2 в два близких момента времени t_1 и t_2. Затем находят частное $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ и выполняют предельный переход $t_2 \to t_1$. Такой метод не годится для измерения мгновенной скорости микрочастицы. Действительно, предельный переход требует точного измерения x_1 и x_2. А точное измерение координаты существенно меняет импульс частицы. Ясно поэтому, что предельным переходом нельзя найти мгновенную скорость ни в одном положении частицы. Можно, правда, промежуток времени $t_2 - t_1$ взять длинным, а измерения x_1 и x_2 произвести с малой точностью. Тогда ошибки измерения мало скажутся на скоростях частицы и на значении дроби $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Но таким путем будет найдена *не истинная скорость частицы, а ее среднее значение на интервале времени* $t_2 - t_1$. Импульс микрочастицы можно определять по разности потенциалов, пройденной ею в ускоряющем электрическом поле, или по длине волны де Бройля λ, измеренной каким-либо дифракционным устройством.

В квантовой механике теряет смысл деление полной энергии $\mathscr{E}$ на кинетическую и потенциальную. Действительно, одна из этих величин зависит от импульсов, а другая от координат. Эти же переменные не могут иметь одновременно определенные значения. Энергия $\mathscr{E}$ должна определяться и измеряться лишь как *полная энергия без деления на кинетическую и потенциальную.* Об этом подробнее будет сказано ниже.

9. В классической теории не было параметра, определяющего размеры атома. Соотношение неопределенностей позволяет установить такой параметр. Рассмотрим для примера водородоподобный атом с зарядом ядра Ze. Рассуждая классически, напишем уравнение сохранения энергии

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} = \text{const}.$$

Если предположить, что электрон вначале находился на бесконечности практически в состоянии покоя, то следует положить const $= 0$. Этим определится p^2, а затем

$$p^2r^2 = 2mZe^2r.$$

Соотношение неопределенностей возьмем в точной форме (20.4). Так как во всяком случае $\Delta r < r$, $\Delta p < p$, то из него следует $p^2r^2 > \hbar^2/4$, а потому $2mZe^2r > \hbar^2/4$, откуда

$$r > \frac{1}{Z}\frac{\hbar^2}{8me^2} = \frac{1}{Z}\cdot 0{,}66\cdot 10^{-9}\ \text{см}. \qquad (20.10)$$

Порядок размера атома эта формула определяет правильно. Численному коэффициенту не следует придавать особое значение, так как формула (20.10) носит только оценочный характер. В частности, оценка показывает, что в кулоновском поле ядра падение электрона на ядро невозможно. Более того, нахождение электрона внутри атомного ядра несовместимо с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

Если применить такую же оценку к определению размеров атомного ядра, то в формуле (20.10) вместо m надо было бы подставить массу протона. В результате для радиуса ядра получилась бы величина примерно в 2000 раз меньшая, чем (20.10). Но и это слишком много (размер ядра порядка 10^{-13} см). Это показывает, что *для образования ядра кулоновских сил недостаточно*. В ядре должны действовать более мощные — *ядерные* — силы, превосходящие кулоновские примерно на два порядка.

10. Наряду с соотношением (20.1) в волновой теории выводится также соотношение

$$\Delta t\cdot\Delta\omega \gtrsim 2\pi \qquad (20.11)$$

(см. т. IV, § 29). Смысл этого соотношения состоит в том, что ограниченный во времени волновой процесс не может быть монохроматическим. Если процесс длится в течение времени Δt, то разброс частот $\Delta\omega$ входящих в него волн в лучшем случае удовлетворяет соотношению (20.11). Поэтому, если для наблюдения даже монохроматического процесса предоставлено малое время Δt, то частота процесса принципиально будет найдена в лучшем случае с ошибкой, подчиняющейся соотношению (20.11).

Если частоте ω сопоставить энергию по формуле $\mathscr{E} = \hbar\omega$, то формула (20.11) перейдет в

$$\Delta t\cdot\Delta\mathscr{E} \geqslant 2\pi\hbar = h. \qquad (20.12)$$

Формула (20.12) называется *соотношением неопределенностей Гейзенберга для времени и энергии*.

Соотношение (20.12) означает, что чем короче время существования какого-то состояния или время, отведенное для его наблюдения, тем с меньшей определенностью можно говорить об энергии этого состояния. Наоборот, чем больше это время, тем с большей точностью определена энергия состояния. Если состояние стационарно, то оно может существовать бесконечно долго. Именно по этой причине энергия стационарного состояния имеет вполне определенное значение. Противоположным примером может служить нестабильная элементарная частица, распадающаяся за очень короткое время (скажем, порядка 10^{-20} с). Об определенной энергии такой частицы говорить не приходится. Поэтому при рассмотрении процесса ее распада не требуется налагать условие сохранения энергии.

ЗАДАЧИ

1. На какую кинетическую энергию $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ должен быть рассчитан электронный (и протонный) ускоритель для исследования структур с линейными размерами $l \sim 1$ ферми (10^{-13} см)?

Ответ.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > mc^2\sqrt{1+(\lambda/l)^2} - mc^2,$$

где $\lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона). Для электрона

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > m_e c^2 \lambda_e / l \approx 720 \text{ МэВ}.$$

Для протона

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > m_p c^2 \sqrt{1+(\lambda_p/l)^2} - m_p c^2 \approx 600 \text{ МэВ}.$$

2. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет около $\Delta t \sim 10^{-8}$ с. При переходе атома в нормальное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого равна $\lambda = 500$ нм. Оценить ширину $\Delta\lambda$ и относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов. (Такая ширина называется естественной шириной спектральной линии.)

Ответ.

$$\Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{c\,\Delta t} \sim 10^{-4} \text{ нм}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\lambda}{c\Delta t} \sim 10^{-7}.$$

3. Принимая во внимание, что классическая (корпускулярная) механика является приближенным предельным случаем механики волновой, найти условие, при выполнении которого рассеяние α-частиц и электронов на атомных ядрах можно рассчитывать классически, как это делал Резерфорд при выводе своей формулы (9.3).

Решение. Обозначим через a радиус атома. Можно считать, что рассеивающаяся частица подвергается действию кулоновских сил ядра только в пределах сферы радиуса a с центром в центре атома. Такая идеализация неприменима только при очень далеких прицельных расстояниях, когда получаются слишком малые углы рассеяния, при которых экспериментальные исследования не производятся. Рассмотрим плоскопараллельный пучок частиц с поперечным сечением Δx, падающий на атом, и выясним, при каких условиях его распространение в атоме можно рассматривать классически, т. е. без учета дифракции частиц (как это делается в приближении геометрической оптики). Дифракционным расширением пучка, как известно из оптики (см. т. IV, § 6), можно пренебречь, если $l \ll \Delta x^2/\lambda$, где l — длина пучка. В рассматриваемой задаче под l следует понимать путь луча в кулоновом поле атома. По по-

рядку величины $l \approx a$, $\Delta x \sim a$. Таким образом, условие применимости приближения геометрической оптики принимает вид $a \ll a^2/\lambda$, или $\lambda \ll a$. Подставив сюда выражение для длины волны де Бройля $\lambda = h/p = h/(2m\mathscr{E})^{1/2}$, находим искомое условие:

$$\mathscr{E} \gg h^2/(2ma^2). \tag{20.13}$$

При нашем рассмотрении не учтено действие ядерных сил. Но радиус ядра $a_{яд}$, где и действуют ядерные силы, примерно в 10^5 раз меньше радиуса атома $a_{ат}$. Поэтому на ядро падает примерно в $(a_{ат}/a_{яд})^2 \approx 10^{10}$ меньше частиц, чем на атом. Точно так же не играют существенной роли и кулоновские силы в непосредственной близости от ядра. Этим наше приближение оправдано.

При численных расчетах формулу (20.13) удобно переписать в виде

$$\mathscr{E} \gg \frac{(hc)^2}{2mc^2a^2}, \tag{20.14}$$

пользуясь численным значением $hc = 1{,}24 \cdot 10^{-4}$ эВ·см. Энергию mc^2 следует брать в эВ, а длину a в см. Для α-частицы $mc^2 = 3{,}75 \cdot 10^9$ эВ. Полагая $a = 10^{-8}$ см, получаем в этом случае

$$\mathscr{E} \gg 0{,}2 \text{ эВ}.$$

Энергия α-частицы порядка 1 МэВ, так что в случае α-частиц применение классической механики оправдано.

Для электрона $mc^2 = 0{,}511 \cdot 10^6$ эВ, а потому должно быть $\mathscr{E} \gg 120$ эВ. Таким образом, для электронов с кинетической энергией ~ 100 эВ классической механикой пользоваться уже нельзя.

Рассмотренную задачу можно было бы также решить на основе принципа неопределенностей Гейзенберга.