

причем  $\xi$  и  $\eta$  определяются прежними выражениями (24.12).

В случае одномерной симметричной ямы *всегда существует по крайней мере одно собственное значение дискретного спектра энергии с четной волновой функцией*. В случае сферически симметричной прямоугольной ямы этого может и не быть. Действительно, кривая  $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$  первый раз пересекает горизонтальную ось координат в точке  $\xi = \pi/2$ ,  $\eta = 0$  (рис. 46, б). Из формулы (24.13) видно, что если

$$(\pi/2)^2 > -2mU_0a^2/\hbar^2,$$

т. е.

$$-U_0 < \pi^2\hbar^2/(8ma^2), \quad (25.7)$$

то эта кривая нигде не пересечется с окружностью (24.13). Это значит, что при условии (25.7) в потенциальной яме не появится *ни одного уровня дискретного спектра энергии*. Первый уровень появляется, когда крайняя левая кривая  $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$  на рис. 46, б начинает пересекаться с соответствующей окружностью. Это происходит в точке  $\xi = \pi/2$ ,  $\eta = 0$ . Из второго уравнения (24.6) следует, что в этом случае  $\mathcal{E} = 0$ , т. е. при возрастании глубины ямы первый уровень появляется на границе дискретного и непрерывного спектров. Расстояние этого уровня от дна потенциальной ямы равно  $-U_0 = \hbar^2\pi^2/(8ma^2)$ , как это легко получить из первой формулы (24.6). В рассматриваемом случае весь дискретный спектр состоит из одного только уровня нулевой энергии.

## § 26. Система двух взаимодействующих частиц

1. До сих пор мы рассматривали движение *одной* частицы в заданном силовом поле. Более реальным является случай *двух* частиц, взаимодействующих между собой. В классической механике в этом случае движение распадается на движение системы как целого в отсутствие внешних сил (*движение центра масс*) и на движение *одной* частицы относительно другой под действием сил взаимодействия между ними (*относительное движение*). Последнее формально сводится к движению одной частицы с заменой ее истинной массы на *приведенную массу*

$$m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (26.1)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы первой и второй частиц. Совершенно так же обстоит дело и в квантовой механике при рассмотрении стационарных состояний.

Исходным служит уравнение Шредингера для стационарных состояний двух частиц. Оно является естественным обобщением уравнения (21.7) и имеет вид

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi = \mathcal{E} \psi. \quad (26.2)$$

Здесь

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}.$$

а через  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$  обозначены координаты рассматриваемых частиц. Потенциальная функция взаимодействия  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  зависит только от разностей координат первой и второй частиц. Обычно (в случае центральных сил) она является функцией только расстояния между ними  $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

2. Преобразуем уравнение (26.2) к новым независимым переменным: координатам центра масс

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (26.3)$$

и координатам первой частицы относительно второй

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (26.4)$$

Величина  $\psi$  теперь является функцией шести переменных:  $\psi = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Но мы для сокращения выкладок (без нарушения общности) произведем их только для функции  $\psi(x_1, x_2)$  двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  и соответственно для  $\psi(X, x)$ , где

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad x = x_1 - x_2.$$

На основании инвариантности полного дифференциала

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial \psi}{\partial X} dX + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

Подставим в правую часть

$$dX = \frac{m_1 dx_1 + m_2 dx_2}{m_1 + m_2}, \quad dx = dx_1 - dx_2.$$

Сравнением коэффициентов получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi.$$

Мы представили результат дифференцирования в операторной форме. Это позволяет сразу написать выражения для вторых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} &= \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi = \\ &= \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} &= \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi = \\ &= \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Поделив эти соотношения соответственно на  $m_1$  и  $m_2$  и сложив, получим

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Теперь уже легко перейти к трем переменным, а затем представить уравнение Шредингера в виде

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi = \mathcal{E} \psi, \quad (26.5)$$

где  $\nabla_R^2$  и  $\nabla^2$  — операторы Лапласа соответственно в переменных  $X, Y, Z$  и  $x, y, z$ .

3. Оператор, действующий на  $\psi$  в левой части (26.5), распадается на сумму двух независимых членов, один из которых зависит только от  $\mathbf{R}$ , а другой только от  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . В соответствии с этим решение уравнения (26.5) сводится к решению двух уравнений:

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 \psi(\mathbf{R}) = \mathcal{E}_R \psi(\mathbf{R}), \quad (26.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_r \psi(\mathbf{r}), \quad (26.7)$$

где  $\mathcal{E}_R$  и  $\mathcal{E}_r$  — постоянные, удовлетворяющие условию  $\mathcal{E}_R + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$ . Из них первое описывает *свободное движение центра масс* системы — воображаемой частицы с массой  $m_1 + m_2$ . Второе же описывает *относительное движение первой частицы относительно второй*, в нем истинная масса частицы заменена приведенной массой  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . В самом деле, произведение  $\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$ , в котором переменным является  $\mathbf{R}$ , а  $\mathbf{r}$  рассматривается как параметр, т. е. в сущности как постоянная, описывает то же движение центра масс, что и функция  $\psi(\mathbf{R})$ . Аналогично, то же произведение  $\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$  будет описывать относительное движение, если за переменную принять  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{R}$  рассматривать как параметр. Если теперь (26.6) умножить на  $\psi(\mathbf{r})$ , а (26.7) на  $\psi(\mathbf{R})$  и оба уравнения сложить почленно, то мы получим, что функция  $\psi = \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$  будет *общим решением* уравнения (26.5). Таким образом, *общая волновая функция, описывающая независимые движения центра масс и относительное движение частиц, распадается на произведение двух функций от различных переменных:  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{R})$* . При этом, как и в классической механике, полная энергия распадается на сумму энергий, связанной с движением центра масс системы, и энергии относительного движения частиц.

Если отвлечься от движения центра масс, считая его как бы неподвижным, то уравнение (26.6) отпадает. Остается только уравнение (26.7) для относительного движения частиц.

Поэтому это уравнение мы будем писать просто в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(r)\psi = \mathcal{E}\psi. \quad (26.8)$$

### ЗАДАЧА

Дейtron состоит из связанных протона и нейтрона. Они удерживают друг друга посредством короткодействующих ядерных сил. Потенциальную функцию взаимодействия можно аппроксимировать пространственной потенциальной ямой прямоугольной формы с глубиной  $-U_0$  и радиусом  $a$  (расстояние между центрами протона и нейтрона). Дейtron имеет только одно связанное состояние. Энергия связи дейтрана, измеренная экспериментально, составляет 2,225 МэВ. Этого недостаточно для определения двух неизвестных  $U_0$  и  $a$ . Зададим  $a = 2 \cdot 10^{-13}$  см (это недалеко от истины). Мы не настаиваем, что это есть точное значение  $a$ . Наша цель — привести только схему расчета. Из этих данных определить глубину потенциальной ямы  $-U_0$ .

Решение. Представляет интерес только относительное движение протона и нейтрона. Поэтому можно воспользоваться уравнением (26.8), понимая под  $m$  приведенную массу системы. Если пренебречь различием масс протона и нейтрона, то приведенная масса будет  $m/2$ , где  $m$  — масса одной из частиц (например, протона). В дальнейших вычислениях используются следующие постоянные:

$$mc^2 = 938,28 \text{ МэВ}, \quad \hbar c = 1,97329 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{см}.$$

Так как у дейтрана только одно связанное состояние, то его энергия в этом состоянии  $\mathcal{E} = -2,225$  МэВ. Это позволяет по формулам (24.6) и (24.12) найти  $\eta$ . Только в формуле (24.6)  $m$  следует заменить на  $m/2$ . Это дает

$$\eta^2 = -m\mathcal{E}a^2/\hbar^2 = -mc^2\mathcal{E}a^2/\hbar^2c^2 = 0,21437 \quad \eta = 0,463099.$$

Величину  $\xi$  находим из уравнения

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi.$$

Сначала решаем это уравнение грубо графически, пользуясь крайней левой кривой на рис. 46, б. Затем уточняем решение аналитически с использованием интерполяции. Таким путем без труда находим

$$\xi = 1,81993.$$

Искомая глубина потенциальной ямы

$$-U_0 = \frac{\hbar^2c^2}{mc^2a^2}(\xi^2 + \eta^2) = 36,61 \text{ МэВ}.$$

### § 27. Квантование водородоподобного атома в сферически симметричном случае

1. Приведем еще один пример на квантование энергии атомной системы. Речь идет о водородоподобном атome. Рассмотрим частный случай, когда волновая функция  $\psi$  электрона в атоме сферически симметрична, т. е. зависит только от радиуса  $r$  — расстояния электрона от атомного ядра. Такой случай не предусматривался старой теорией Бора. В ней всякое движение электрона вокруг ядра происходило по плоским орбитам и, следовательно, не могло быть сферически симметричным. Но в