

После подстановки в (27.1) получаем

$$\frac{1}{a_n^2} P_{n-1} - \frac{2}{a_n} P'_{n-1} + P''_{n-1} - \frac{2}{a_n} \frac{P_{n-1}}{r} + \frac{2P'_{n-1}}{r} + \frac{qP_{n-1}}{r} - \beta^2 P_{n-1} = 0.$$

Это соотношение должно выполняться тождественно по r . Старшую степень r^{n-1} содержат только первое и последнее слагаемые. Поэтому должно быть

$$1/a_n^2 = \beta, \quad \text{или} \quad 1/a_n = \beta.$$

Степень r^{n-2} содержит только подчеркнутые члены. При этом при взятии производной P_{n-1} появляется коэффициент $(n-1)$. С учетом этого

$$-\frac{2(n-1)}{a_n} - \frac{2}{a_n} + q = 0, \quad \text{или} \quad \frac{2n}{a_n} = q.$$

Таким образом,

$$a_n = \frac{2n}{q} = n \frac{\hbar^2}{mZe^2} = na_1.$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2 \beta}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

Недостаток приведенного решения — в том, что мы не исследовали до конца, что наша функция $\Psi_n(r)$ действительно является решением уравнения Шредингера. Для небольших n , подобно тому как это было сделано в § 23, нетрудно найти в явном виде полиномы $P_{n-1}(r)$ и соответствующие им постоянные a_n . Таким путем можно убедиться, что функции $\Psi_n(r) = P_{n-1}(r) \times e^{-r/a_n}$ действительно удовлетворяют уравнению Шредингера. Можно проверить также, что все корни полинома $P_{n-1}(r)$ вещественные и некратные.

§ 28. Потенциальные барьеры

1. К задаче о квантовании энергии в потенциальных ямах примыкает задача о прохождении частицы через потенциальные барьеры. Ограничимся рассмотрением одномерных потенциальных барьеров, когда потенциальная функция U зависит только от одной координаты x . Потенциальным барьером такого типа называется ограниченная параллельными плоскостями область пространства, в которой потенциальная функция $U(x)$ больше, чем в примыкающих областях.

Начнем с простейшего идеализированного случая *прямоугольного потенциального барьера*, когда одна из его стенок удалена в бесконечность (рис. 50). Такой барьер может быть назван *ступенчатым*, так как потенциальная функция $U(x)$ в этом случае представляется ступенчатой линией:

$$U(x) = \begin{cases} U_1 = \text{const} & \text{в области } I, \text{ где } x < 0, \\ U_2 = \text{const} & \text{в области } II, \text{ где } x > 0, \end{cases} \quad (28.1)$$

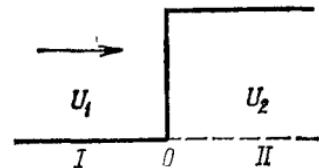


Рис. 50

причем $U_2 > U_1$. На границу барьера слева с постоянной скоростью налетает частица или поток частиц. С классической точки зрения частица ведет себя по-разному в зависимости от того, будет ли ее полная энергия \mathcal{E} больше или меньше U_2 . В первом случае, когда $\mathcal{E} > U_2$, частица, достигнув границы барьера, будет продолжать движение в прежнем направлении, но с меньшей кинетической энергией. Во втором случае, когда $\mathcal{E} < U_2$, частица вообще не может проникнуть через границу барьера. Она отразится от него и начнет движение в обратном направлении с той же кинетической энергией.

2. Совсем иное решение задачи дает квантовая механика. Здесь движение частицы, хотя и символически, связано с распространением волн. Основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера — описывает (и притом детерминистически) распространение именно волн, а не движение частиц. Переход же от поведения волн к движению частиц устанавливается *вероятностными законами*. Поэтому поставленная нами задача должна быть переформулирована, а затем решена для волн на основе уравнения Шредингера. Последнее мы будем записывать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad (28.2)$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - U), \quad (28.3)$$

причем U имеет разные, но постоянные значения U_1 и U_2 по разные стороны границы барьера. Соответствующие им значения k обозначаются через k_1 и k_2 .

Вместо потока частиц теперь надо предположить, что в области I к границе барьера распространяется плоская монохроматическая волна

$$\psi_1 = e^{i(k_1 x - \omega t)}.$$

Чтобы удовлетворялись граничные условия для ψ и $d\psi/dx$ на границе барьера, в области I должна существовать отраженная волна

$$\psi'_1 = r e^{-i(k_1 x + \omega t)},$$

а в области II — прошедшая волна

$$\psi_2 = d e^{i(k_2 x - \omega t)}.$$

Амплитуда падающей волны принята равной единице, что, очевидно, не нарушает общности получаемых ниже результатов. Постоянные r и d называются *амплитудными коэффициентами отражения и пропускания волн*. Для их определения заметим, что функция ψ и ее производная по x на границе барьера должны быть непрерывны. Это значит, что при $x = 0$ должны

выполняться соотношения

$$(\psi_1 + \psi'_1) = \psi_2, \quad \frac{d}{dx} (\psi_1 + \psi'_1) = \frac{d\psi_2}{dx},$$

или

$$1 + r = d, \quad k_1 - k_1 r = k_2 d.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad d = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (28.4)$$

Это такие же соотношения, но записанные в иной форме, которые были получены в оптике для коэффициентов Френеля (1788—1827) при нормальном падении света на границу раздела сред (см. т. IV, §§ 65, 69). Они справедливы не только при $U_2 > U_1$ (потенциальный барьер), но и при $U_2 < U_1$ (потенциальная яма).

3. Принципиальное отличие квантовомеханического решения от классического состоит в том, что в классической физике частица локализована, а в квантовой механике — нет. В классической физике говорят об энергии и состоянии частицы, когда она находится в определенном месте пространства, независимо от того, что происходит в остальных местах пространства. В квантовой механике это не так. Решение, даваемое квантовой механикой, волна, есть понятие, относящееся ко всему пространству. Падающая волна органически связана с отраженной и прошедшей волнами. Нельзя выделить одну из этих волн, отвлекаясь от остальных. Полная энергия \mathcal{E} относится не к какой-либо одной волне, а к состоянию частицы в целом, определяемому всеми тремя функциями ψ_1, ψ'_1, ψ_2 . Понимание этого обстоятельства позволяет избежать многих парадоксальных выводов, связанных с прохождением частиц через потенциальные барьеры.

Заметим еще, что задача об определении амплитудных коэффициентов отражения и пропускания волн есть чисто детерминистическая задача. Она формулируется и решается в стиле классической физики — на основе точно сформулированного уравнения Шредингера и соответствующих ему граничных условий. Но не эти коэффициенты определяют реальные величины, с которыми приходится иметь дело на опыте. На опыте измеряются коэффициенты отражения и пропускания не для волн, а для частиц. Они же связаны с амплитудными коэффициентами отражения и пропускания волн вероятностными соотношениями. Коэффициенты отражения и пропускания для частиц определяются ниже. Таким образом, отражение частиц от потенциального барьера и прохождение через него определяются вероятностными законами.

4. При сравнении квантовомеханического решения с классическим рассмотрим сначала случай $\mathcal{E} > U_2$. В этом случае все три волны — падающая, отраженная и прошедшая — однород-

ны. Отличие квантового случая от классического состоит прежде всего в том, что в классическом случае нет отраженного потока частиц. В квантовом же случае неизбежно появляется отраженная волна, а с ней и вероятность обнаружить частицу, движущуюся навстречу падающему потоку. Для однородной волны можно ввести понятие *плотности вероятности потока вещества*. В самом деле, однородный поток не локализован, он характеризуется определенной *плотностью импульса*, тогда как его координата совершенно не определена. Можно говорить и о *скорости распространения вероятности* такого потока. Она просто совпадает с классической скоростью и равна $v = p/m = \hbar k/m$. Наконец, плотность вероятности потока массы вещества равна $m v \psi^* \psi = \hbar k \psi^* \psi$. В падающей волне эта величина равна $\hbar k_1 \psi_1^* \psi_1 = \hbar k_1$. Аналогично, плотности вероятности потока вещества в отраженной и прошедшей волнах равны соответственно $|r|^2 \hbar k_1$ и $|d|^2 \hbar k_2$. Отношение плотности вероятности потока массы в отраженной волне к плотности вероятности потока массы в падающей волне называется *коэффициентом отражения частицы R*. Аналогично определяется *коэффициент пропускания частицы D*. Он называется также *пропускаемостью* или *прозрачностью барьера*. Для этих величин находим

$$R = |r|^2 = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \quad D = \frac{k_2}{k_1} |d|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (28.5)$$

так что $R + D = 1$, в согласии с законом сохранения вещества.

5. Обратимся теперь к случаю, когда $\mathcal{E} < U_2$. В этом случае формулы (28.4), конечно, также остаются справедливыми. Остается справедливой и первая формула (28.5), поскольку отраженная волна по-прежнему однородна. Однако величина k_2 будет *чисто мнимой*, так что волна во второй области станет *неоднородной*. В первой же формуле (28.5) числитель и знаменатель будут величинами комплексно сопряженными. Значит, $R = 1$, т. е. отражение частиц становится *полным*, как и в аналогичном случае в оптике. Однако волна во второй области не исчезает. Действительно, полагая $k_2 = i\alpha$, для этой волны получаем

$$\Psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-\alpha x} e^{-i\omega t}, \quad (28.6)$$

т. е. амплитуда волны в области II экспоненциально затухает при удалении от границы раздела областей. Глубина проникновения l определяется как расстояние, на котором плотность вероятности потока вещества убывает в e раз. Для нее получаем

$$l = 1/2\alpha = \lambda_2/4\pi, \quad (28.7)$$

где

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(U_2 - \mathcal{E})}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_2 - \mathcal{E})}}. \quad (28.8)$$

Таким образом, волна проникает в область II , несмотря на то, что она отражается полностью, а вероятность отражения частицы обращается в единицу. Разрешение возникающего здесь кажущегося парадокса в точности такое же, как и в случае полного отражения света (см. т. IV, § 66). Наше решение относится к *стационарному состоянию*, поскольку оно основано на уравнении Шредингера именно для таких состояний. Проникновение же волны во вторую область происходит в переходный период, когда состояние во времени еще не установилось. В этот переходный период полного отражения волны еще не может быть. Исследование же переходного периода может быть осуществлено на основе уравнения Шредингера, но уже для нестационарных состояний (21.5).

6. Подчеркнем еще раз, что в найденном нами стационарном состоянии, описываемом тремя волновыми функциями Ψ_1 , Ψ'_1 , Ψ_2 , частица не локализована. Она может с той или иной вероятностью находиться в любой точке пространства. Общим для всего этого состояния является параметр \mathcal{E} , названный нами *полной энергией* частицы. Следует с осторожностью отождествлять это понятие с полной энергией, как она понимается в классической механике. Так, мы уже указывали, что в квантовой механике не всегда имеет смысл деление полной энергии на кинетическую и потенциальную (см. § 20, пункт 8). Чтобы определить параметр \mathcal{E} , надо произвести *измерение*, т. е. как-то воздействовать на частицу.

7. Рассмотрим сначала состояние частицы в части пространства I . Оно представляет собой суперпозицию двух плоских монохроматических волн Ψ_1 и Ψ'_1 , распространяющихся на встречу друг другу. Их волновые числа имеют определенные значения, одинаковые по величине. Поэтому одинаковы по величине и импульсы, соответствующие обеим волнам. Измеряя импульс, когда частица находится в части пространства I , мы найдем, что он с той или иной вероятностью равен либо $p_1 = \hbar k_1$, либо $p'_1 = -\hbar k_1$. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенberга определенность импульса в каждой волне связана с тем, что *частица не локализована*. Действительно, неопределенность координаты Δx бесконечно велика, и потому, согласно соотношению (20.2), неопределенность импульса Δp для каждой волны обращается в нуль. Учитывая соотношение $p = \hbar k$, формулу (28.3) можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + U, \quad (28.9)$$

т. е. \mathcal{E} , как и в классической механике, равна сумме кинетической и потенциальной энергии. Такое совпадение с классической механикой обусловлено тем, что потенциальная функция U_1 во

всем пространстве / постоянна, т. е. это пространство свободно от сил. К тому же результату мы приедем и в пространстве II, если только в этом пространстве $\mathcal{E} > U_2$, и, следовательно, волна однородна.

8. Рассмотрим теперь область II в случае, когда $\mathcal{E} < U$. Вероятность обнаружить частицу в области II в этом случае рассматривалась как парадокс. Основанием для этого является соотношение (28.9), из которого следует, что всегда $\mathcal{E} > U$, так как кинетическая энергия $p^2/2m$ существенно положительна. Однако, как уже неоднократно подчеркивалось, формула (28.9) есть *соотношение классической механики* и неприменима при $\mathcal{E} < U$. В этом случае волна де Броиля неоднородна и обычные выражения импульса и кинетической энергии частицы теряют смысла. Однако обнаружить частицу в области II возможно, поскольку вероятность такого обнаружения не обращается в нуль, а лишь экспоненциально убывает по мере удаления от границы барьера в сторону положительных x . Обнаружить частицу — это значит указать границы, между которыми она окажется в результате обнаружения. Практически частицу можно обнаружить только в тонком поверхностном слое вблизи границы барьера, толщина которого порядка глубины проникновения l . Величина l и может быть принята за неопределенность координаты после обнаружения частицы. Неопределенность импульса обозначим через Δp . Тогда в силу соотношения неопределенностей (20.4)

$$\overline{\Delta p^2} \cdot l^2 \geq \hbar^2/4.$$

Подставляя сюда значение l из (28.7) и (28.8), получим

$$\frac{\overline{\Delta p^2}}{2m} \geq U_2 - \mathcal{E},$$

т. е. для локализации частицы в области II в слое толщины l ей необходимо сообщить кинетическую энергию, величина которой во всяком случае не меньше $U_2 - \mathcal{E}$, т. е. положительна. Такую энергию частица может, например, получить при освещении ее световым квантом достаточно короткой длины волны (эффект Комптона). Понятно, что такая локализация меняет квантовое состояние частицы. После взаимодействия со световым квентом волновая функция частицы будет отличаться от нуля только внутри выбранного нами слоя толщины l , обращаясь в нуль вне этого слоя.

Не обязательно, чтобы слой толщины l , в котором обнаруживается частица, располагался у края барьера. Он может быть расположен где угодно в области II. От его положения зависит лишь величина вероятности обнаружения частицы в слое. Но энергия, которую надо сообщить частице при ее локализации в слое толщины l , зависит только от толщины слоя, а не от его

положения. Толщина же слоя определяется экспонентой e^{-2al} и от положения слоя не зависит.

Иллюстрируем роль измерения еще на следующем примере. Частица должна быть локализована внутри слоя толщины l . С этой целью осветим ее пучком света, распространяющимся вдоль слоя перпендикулярно к оси X . Если произойдет рассеяние света, то это и будет означать, что частица в момент рассеяния была локализована внутри рассматриваемого слоя. Из оптики известно, что длина световой волны для локализации должна быть короче l , т. е. $\lambda < l$. Из формул (28.7) и (28.8) получаем

$$\lambda < \frac{h}{4\pi \sqrt{2m(U_2 - \mathcal{E})}},$$

или

$$(hc/\lambda)^2 \equiv (hv)^2 > 32\pi^2 mc^2 (U_2 - \mathcal{E}).$$

Нерелятивистская механика применима к процессам, когда энергия светового кванта hv мала по сравнению с собственной энергией частицы mc^2 . Поэтому, разделив левую часть предыдущего неравенства на меньшую величину hv , а правую на большую $32\pi^2 mc^2$, получим тем более

$$hv > U_2 - \mathcal{E}.$$

Таким образом, для локализации должны применяться световые кванты, энергия которых во всяком случае не меньше разности между потенциальной и полной энергиями частицы. Это находится в согласии с тем, что было сказано выше.

9. Заканчивая рассмотрение ступенчатого барьера, выведем некоторые общие соотношения, связывающие амплитудные коэффициенты отражения и пропускания волн де Броиля на границе барьера. Если переменить на противоположные направления распространения всех волн де Броиля без изменения их амплитуд, то уравнение Шредингера и соответствующие ему граничные условия будут по-прежнему удовлетворены. Отсюда следует, что если возникло состояние, изображенное на рис. 51, *a*, то возможно также и состояние, изображенное на рис. 51, *b*. На этих рисунках каждая волна де Броиля представлена двумя символами. Первый из них представляет амплитуду, а второй — волновое число соответствующей волны, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси X . Направления распространения волн обозначены стрелками. На рис. 51, *a* есть только одна, а на рис. 51, *b* — две падающие волны. Обозначим через r' и d' амплитудные коэффициенты отражения и пропускания, когда падающая волна распространяется справа налево из области *II* к области *I*. Падающая волна (r, k_1) дает отраженную волну $(r^2, -k_1)$. Падающая волна $(d, -k_2)$ возбуждает проходящую волну $(dd', -k_1)$. Обе возбужденные волны

должны при наложении дать уходящую волну $(1, -k_1)$. Таким образом, должно быть

$$r^2 + dd' = 1. \quad (28.10a)$$

Аналогично, волна (r, k_1) возбуждает проходящую волну (rd, k_2) , а волна $(d, -k_2)$ — отраженную волну (dr', k_2) . Обе возбужден-



Рис. 51

ные волны должны гасить друг друга, т. е. $rd + dr' = 0$, откуда

$$r' = -r. \quad (28.10b)$$

Соотношения (28.10a) и (28.10b) справедливы как для однородных, так и для неоднородных волн. Они были уже получены в т. IV (§ 67) для световых волн. Применим их к прямоугольному потенцициальному барьере (или яме) конечной ширины.

Барьер вместе с падающей волной изображен на рис. 52, а. Более детальная картина падающей, прошедших и отраженных

волн представлена на рис. 52, б. Для волн и их направлений примем те же обозначения, что и на рис. 51. Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения волн (слева направо) на первой границе обозначим через r_1 и d_1 , на второй — через r_2 и d_2 . Для обратного направления волн (справа налево) те же коэффициенты обозначим через r'_1 , d'_1 , r'_2 , d'_2 . Результирующие амплитудные коэффициенты отражения и пропускания волн для всего барьера обозначим соответ-

ственно через r и d . Все волны, которые возникнут внутри и вне барьера, представлены на рис. 52, б. Внутри барьера в противоположных направлениях будут распространяться две волны: (a, k) и $(b, -k)$. На левой границе барьера, как видно из рисунка, сходятся четыре волны, а на правой — три волны. Написав граничные условия — непрерывность ψ и $d\psi/dx$ на каждой границе барьера, — мы получим четыре уравнения первой сте-

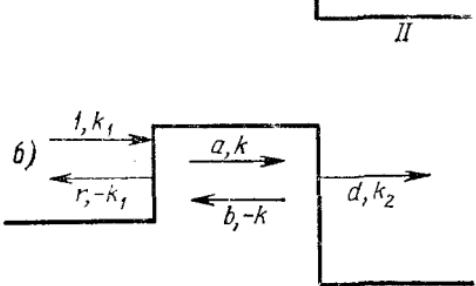


Рис. 52

пени, из которых могут быть найдены все неизвестные амплитуды r, a, b, d . Однако выкладки упростятся, а результаты выразятся в более краткой и компактной форме, если поступить несколько иначе.

10. Рассмотрим сначала условия на левой границе барьера. Примем эту границу за начало координат. К ней подходят две волны: $(1, k_1)$ слева и $(b, -k)$ справа. Обе волны отражаются от рассматриваемой границы барьера и частично проходят через нее. В результате наложения отраженной и прошедшей волн в первой области должна получиться результирующая отраженная волна $(r, -k_1)$, а внутри барьера — волна (a, k) . Таким образом, должно быть

$$r = r_1 + d'_1 b, \quad a = d_1 + r'_1 b. \quad (28.11)$$

Аналогично поступаем на второй границе барьера. Только теперь начало координат надо перенести на вторую границу и соответственно этому преобразовать амплитуды сходящихся на ней волн. Амплитуды волн, изображенных на рис. 52, б, отнесены к началу координат,енному на левой границе. Соответствующие координаты обозначены через x , а координаты относительно начала, помещенного на второй границе, обозначим через x' . Эти координаты связаны соотношением $x = x' + l$. При прежнем выборе начала координат волны, сходящиеся на правой границе барьера, представляются выражениями

$$ae^{ikx}, \quad be^{-ikx}, \quad de^{ik_2 x}$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы опускаем). При замене x через x' те же выражения преобразуются в

$$(ae^{ikl}) e^{ikx'}, \quad (be^{-ikl}) e^{-ikx'}, \quad (de^{ik_2 l}) e^{ik_2 x'}.$$

Теперь роль амплитуд волн играют выражения, заключенные в круглых скобках. В результате условия на правой границе барьера принимают вид

$$de^{ik_2 l} = d_2 ae^{ikl}, \quad be^{-ikl} = r_2 ae^{-ikl}. \quad (28.12)$$

Из уравнений (28.11) и (28.12) можно найти все неизвестные r, d, a, b . Из них представляют интерес прежде всего r и d . С учетом соотношений $r'_1 = -r_1$ и $r_1^2 + d_1 d'_1 = 1$ для них находим

$$r = \frac{r_1 + r_2 e^{2ikl}}{1 + r_1 r_2 e^{2ikl}}, \quad d = \frac{d_1 d_2 e^{-l(k_2 - k)l}}{1 + r_1 r_2 e^{2ikl}}. \quad (28.13)$$

11. Пользуясь этими формулами, можно рассчитать коэффициенты отражения и пропускания для частиц. Рассчитаем коэффициент пропускания D . Предположим, что вне барьера $U_1 < \mathcal{E}$

и $U_2 < \mathcal{E}$, тогда как внутри барьера $U > \mathcal{E}$. Тогда обе величины

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\mathcal{E} - U_1)} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\mathcal{E} - U_2)}$$

вещественны и положительны, внутри же барьера $k = i\alpha$, где

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - \mathcal{E})}.$$

Далее,

$$r_1 = \frac{k_1 - k}{k_1 + k} = \frac{k_1 - i\alpha}{k_1 + i\alpha}, \quad r_2 = \frac{k - k_2}{k + k_2} = \frac{i\alpha - k_2}{i\alpha + k_2},$$

$$d_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2k_1}{k_1 + i\alpha}, \quad d_2 = \frac{2k}{k + k_2} = \frac{2i\alpha}{k_2 + i\alpha}.$$

Коэффициент пропускания частицы, согласно (28.5), вычисляется по формуле

$$D = \frac{k_2}{k_1} |d|^2 = \frac{k_2}{k_1} dd^*. \quad (28.14)$$

Простые, но несколько длинные вычисления приводят к результату

$$D = \frac{16k_1 k_2 \alpha^2}{(k_1^2 + \alpha^2)(k_2^2 + \alpha^2)(e^{2\alpha l} + e^{-2\alpha l}) + 2(\alpha^2 - k_1 k_2)}. \quad (28.15)$$

В большинстве интересующих нас случаев экспонентой $e^{-2\alpha l}$ в знаменателе можно пренебречь. Допустим, например, что $U - \mathcal{E} = 50$ эВ = $0,8 \cdot 10^{-10}$ эрг. Тогда для электрона $\alpha = 3,64 \cdot 10^8$ см⁻¹, $e^{2\alpha l} = 1,45 \cdot 10^3$, $e^{-2\alpha l} = 0,69 \cdot 10^{-3}$. Можно также пренебречь слагаемым $2(\alpha^2 - k_1 k_2)$, так как оно того же порядка, что и коэффициент $(k_1^2 + \alpha^2)(k_2^2 + \alpha^2)$. В результате получается простая формула

$$D = D_0 e^{-2\alpha l} = D_0 \exp \left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - \mathcal{E})} \right], \quad (28.16)$$

где коэффициент D_0 слабо меняется с изменением l , \mathcal{E} , U_1 , U_2 . Его можно принять постоянным и в большинстве интересных случаев считать порядка единицы.

Если частица падает на барьер с одной стороны, то по классическим представлениям при $U > \mathcal{E}$ она не может появиться с другой стороны. Напротив, согласно квантовой механике это возможно. Частица как бы проходит по туннелю через классически запрещенную область $U > \mathcal{E}$. Это явление получило название *туннельного эффекта*. Если при этом $U_1 = U_2$ (симметричный прямоугольный потенциальный барьер), то кинетическая энергия, с которой частица появляется за барьером, равна начальной кинетической энергии, с которой она падала на барьер. Начало представления о туннельных переходах было заложено в 1927 г. Л. И. Мандельштамом и М. А. Леоновичем (1903—1981). Они на основе уравнения Шредингера рассмо-

трели проблему квантования для ангармонического осциллятора, у которого потенциальная функция $U = \frac{1}{2}kx^2$ при $|x| < a$ и $U = \text{const}$ при $|x| > a$.

12. Мы рассмотрели потенциальный барьер прямоугольной формы (рис. 52). Это было сделано только с целью математического упрощения задачи. Ничего принципиального при этом потеряно не было. Для полноты рассмотрим теперь потенциальный барьер, в котором U является произвольной функцией x . Пример такого барьера приведен на рис. 53. Горизонтальная

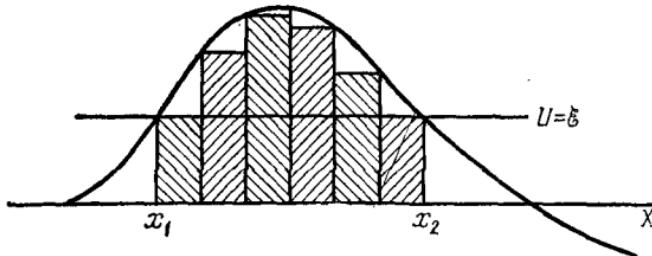


Рис. 53

прямая $U(x) = E$ пересекает кривую барьера в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 . Аппроксимируем кривую барьера над этой прямой ступенчатой линией. Тогда вся площадь, где $E < U$, разбивается на заштрихованные прямоугольники, каждый из которых можно рассматривать как прямоугольный потенциальный барьер. Пусть ширина одного из таких прямоугольников равна dx , а высота $U(x)$. Если dx взять достаточно большим, то коэффициент пропускания такого прямоугольного барьера представится выражением

$$D'_0 \exp \left[-\frac{2dx}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} \right].$$

Коэффициент пропускания всего барьера получится путем перемножения выражений такого вида. При этом показатели степеней сложатся, и мы придем к выражению вида

$$D = D_0 \exp \left\{ - \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} dx \right\}. \quad (28.17)$$

Эту приближенную формулу можно обосновать и математически более строго.

Туннельным прохождением через потенциальный барьер объясняются многие физические явления. Сюда относятся разбираемые в следующем параграфе контактная разность потенциалов и холодная эмиссия электронов из металлов. Сюда же относятся такие явления, как α -распад, спонтанное деление атомных ядер, ядерные реакции, когда по классическим представлениям кинетической энергии сталкивающихся ядер недостаточно

статочно для преодоления кулоновского потенциального барьера между ними, и т. д. Эти явления будут разобраны в ядерной физике.

ЗАДАЧА

В прямоугольном барьере (или яме) $U_1 = U_2$. При каком условии частица не будет отражаться от потенциального барьера (ямы)?

Ответ. Полная энергия \mathcal{E} должна быть больше потенциальной энергии U частицы внутри барьера (ямы). Толщина барьера (ямы) должна быть $l = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots$, где $\lambda = h/\sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$ — длина волны де Броиля внутри барьера (ямы).

§ 29. К объяснению контактной разности потенциалов. Холодная эмиссия электронов из металлов

1. Будем исходить из простейшей модели металла — модели *свободных электронов*. Согласно этой модели электроны в металле ведут себя как газ невзаимодействующих частиц, движущихся в свободном от поля пространстве. Электроны удерживаются в металле силами отталкивания, возникающими при приближении электронов к стенке металла. В такой модели металл можно рассматривать как потенциальную яму, в которой заперты электроны. Для простоты будем считать яму прямоугольной определенной глубины. Мы не можем дать удовлетворительное обоснование и указать границы применимости такой модели. Особое удивление вызывает то, что электрические силы взаимодействия между электронами не учитываются, хотя они отнюдь не малы. Возможность отвлекаться от таких сил, по-видимому, связана с тем, что взаимодействие между электронами не меняет числа энергетических уровней системы. Последнее определяется только общим числом электронов, а не силами взаимодействия между ними. Для ряда явлений, по крайней мере при их качественном рассмотрении, существенно именно общее число энергетических уровней, а не их точное расположение. Разумеется, как и всякая модель, модель свободных электронов объясняет отнюдь не все свойства металлов. Однако ряд явлений объясняется этой моделью правильно, по крайней мере качественно.

На рис. 54 представлена модель металла в виде прямоугольной потенциальной ямы. Внутри металла (т. е. на дне потенциальной ямы) потенциальная функция принята равной нулю, на стенах ямы она скачкообразно меняется до постоянного значения $U_0 > 0$. Конечно, энергетические уровни электрона внутри ямы дискретны, хотя в макроскопических кусках металла и расположены очень густо. Собственно говоря, нельзя сказать,

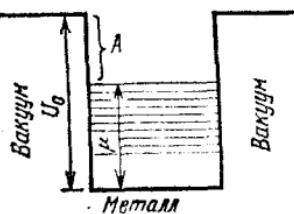


Рис. 54