ибо операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}_y = -i\hbar\,\partial/\partial y$ коммутируют, поскольку при дифференцировании по y координата x ведет себя как постоянная.

§ 31. Момент импульса частицы

1. Момент импульса частицы $\boldsymbol{l}$ относительно начала координат O в классической механике определяется векторным произведением $[\boldsymbol{rp}]$. Такое определение в квантовой механике не имеет смысла, поскольку не существует состояния, в котором бы оба вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ имели определенные значения. В квантовой механике векторному произведению $[\boldsymbol{rp}]$ соответствует оператор

$$\hat{\boldsymbol{l}} = [\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}}] \tag{31.1}$$

Раскрывая это векторное произведение и соблюдая при этом порядок расположения операторов координат и проекций вектора импульса, найдем операторы проекций момента импульса на координатные оси X, Y, Z:

$$\begin{aligned}
\hat{l}_x &= (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right),\\
\hat{l}_y &= (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right),\\
\hat{l}_z &= (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{31.2}$$

Через эти проекции сам оператор вектора момента импульса выражается формулой

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{i}\hat{l}_x + \boldsymbol{j}\hat{l}_y + \boldsymbol{k}\hat{l}_z. \tag{31.3}$$

Смысл этого векторного оператора выяснится, если написать результат действия его на произвольную функцию ψ. Это есть

$$\hat{\boldsymbol{l}}\psi = \boldsymbol{i}(\hat{l}_x\psi) + \boldsymbol{j}(\hat{l}_y\psi) + \boldsymbol{k}(\hat{l}_z\psi), \tag{31.4}$$

т. е. вектор с составляющими $\hat{l}_x\psi$, $\hat{l}_y\psi$ и $\hat{l}_z\psi$. Таким образом, произвольной волновой функции ψ соответствует вектор, определяемый выражением (31.4). Возникает, однако, вопрос, существует ли такая функция ψ, для которой все три проекции вектора (31.4) имеют определенные значения, т. е. одновременно выполняются все три равенства:

$$\hat{l}_x\psi = l_x\psi, \quad \hat{l}_y\psi = l_y\psi, \quad \hat{l}_z\psi = l_z\psi. \tag{31.5}$$

Для ответа на этот вопрос надо найти правила коммутации операторов $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$. Перемножая операторы $\hat{l}_x$ и $\hat{l}_y$ и сохраняя

порядок их расположения, получим

$$\hat{l}_x\hat{l}_y = -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) =$$

$$= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x}\right) =$$

$$= -\hbar^2\left(zx\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Аналогично

$$\hat{l}_y\hat{l}_x = -\hbar^2\left(zy\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Операции дифференцирования по двум независимым переменным перестановочны, т. е., например, $\partial^2/\partial x\,\partial y = \partial^2/\partial y\,\partial x$. Поэтому почленным вычитанием предыдущих равенств получим

$$\hat{l}_x\hat{l}_y - \hat{l}_y\hat{l}_x = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\hat{l}_z.$$

Аналогично получаются и два остальных правила коммутации. Итак,

$$\begin{aligned} \hat{l}_y\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{l}_y &= i\hbar\hat{l}_x, \\ \hat{l}_z\hat{l}_x - \hat{l}_x\hat{l}_z &= i\hbar\hat{l}_y, \\ \hat{l}_x\hat{l}_y - \hat{l}_y\hat{l}_x &= i\hbar\hat{l}_z. \end{aligned} \tag{31.6}$$

Таким образом, *любые две проекции оператора момента не коммутируют между собой. Поэтому не существует состояния, в котором бы все три и даже какие-либо две из трех проекций l_x, l_y, l_z имели определенные значения* (см. § 30, пункт 7). Исключением является только случай, когда все три проекции одновременно равны нулю. Значит *не существует состояния, в котором бы и сам вектор момента импульса имел определенное значение, т. е. был бы полностью определен как по величине, так и по направлению.* Иными словами, *оператор момента* $\hat{\mathbf{l}}$ *не имеет собственных функций и соответствующих им векторных собственных значений.* Связь векторного оператора момента с реальной действительностью в общем виде устанавливается *статистически* — с помощью формулы (30.21), которая позволяет находить средние значения, получаемые при измерении самого момента импульса, а не соответствующего ему оператора.

2. Какими же физическими величинами (а не их операторами) характеризуется в квантовой механике момент импульса частицы? Для решения этого вопроса выразим прежде всего операторы проекций момента импульса через сферические (полярные) координаты. Вопрос этот может быть просто решен аналитически. Но аналитическое решение довольно громоздко. Мы предпочитаем привести геометрическое решение. Начало коор-

динат прямоугольной XYZ и сферической систем координат поместим в общей точке O (рис. 57). В сферических координатах положение точки A характеризуется расстоянием ее r от точки O и двумя углами ϑ (полярный угол) и φ (азимут). В точке A проведем касательную AB к меридиану ZAN и касательную AC к соответствующей параллели. Введем вспомогательную прямоугольную систему координат $\xi\eta\zeta$ с осями $O\xi$ и $O\eta$, параллельными соответственно AB и AC, и осью $O\zeta$, направленной вдоль радиуса OA. Предполагая, что (классическая) частица находится в точке A, получаем для нее $\xi = \eta = 0$, $\zeta = r$. Поэтому, заменяя в формулах (31.2) x, y, z на ξ, η, ζ, можем написать

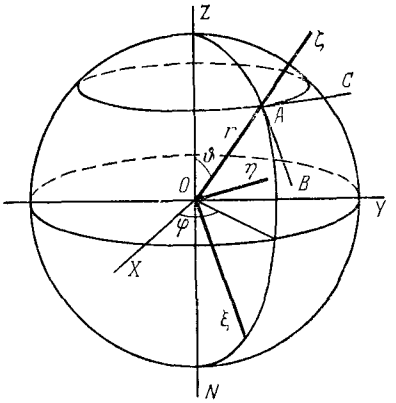

Рис. 57

$$\hat{l}_\xi = i\hbar r \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\hat{l}_\eta = -i\hbar r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \hat{l}_\zeta = 0.$$

Но, как видно из рис. 57, $d\xi = r\,d\vartheta$ (при постоянных r и η), $d\eta = r \sin\vartheta\, d\varphi$ (при постоянных r и ξ). Поэтому

$$\hat{l}_\xi = i \frac{\hbar}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{l}_\eta = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \hat{l}_\zeta = 0.$$

Теперь легко перейти к исходной прямоугольной системе координат XYZ, пользуясь обычным правилом преобразования проекций вектора. Применимость такого правила к операторам обусловлена тем, что направляющие косинусы, определяющие расположение координатных систем XYZ и $\xi\eta\zeta$ относительно друг друга, следует рассматривать как величины постоянные, на которые операторы $\partial/\partial\vartheta$ и $\partial/\partial\varphi$ не действуют. Запишем нужные направляющие косинусы в виде таблицы:

	ξ	η	ζ
X	$\cos\vartheta\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	
Y	$\cos\vartheta\sin\varphi$	$\cos\varphi$	
Z	$-\sin\vartheta$	0	$\cos\vartheta$

Тогда

$$\hat{l}_x = \hat{l}_\xi \cos\vartheta \cos\varphi - \hat{l}_\eta \sin\varphi,$$
$$\hat{l}_y = \hat{l}_\xi \cos\vartheta \sin\varphi + \hat{l}_\eta \cos\varphi,$$
$$\hat{l}_z = -\hat{l}_\xi \sin\vartheta,$$

или

$$\hat{l}_x = i\hbar\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\hat{l}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{31.7}$$
$$\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Отметим существенную разницу между классическим моментом импульса частицы $[\boldsymbol{rp}]$ и соответствующим ему квантовым оператором момента (31.3). Классический момент зависит от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, т. е. от выбора начала координат O, относительно которого берется момент импульса. Оператор момента, как видно из формул (31.7), не содержит $\boldsymbol{r}$, а зависит только от углов ϑ и φ. Это значит, что оператор момента (31.3) не зависит от выбора начала координат, а зависит только от направления координатных осей. Поэтому его лучше называть *оператором углового* или *вращательного момента* частицы. При рассмотрении углового момента, в отличие от классического момента импульса, не надо указывать, относительно какого начала он берется. Разумеется, не зависят от выбора начала координат и собственные значения операторов проекций и квадрата углового момента, о которых говорится ниже.

3. Теперь поставим вопрос, может ли одна из проекций углового момента иметь определенное значение? Ясно, что если вопрос решается в положительном (или отрицательном) смысле для какой-либо одной из проекций, то он должен решаться в том же смысле и для каждой из остальных двух проекций, а также для проекции углового момента вдоль любого произвольно избранного направления. Это непосредственно следует из изотропии пространства, т. е. из эквивалентности всех направлений в пространстве. Не могут иметь в одном и том же состоянии определенные значения проекции углового момента вдоль двух различных направлений. Избранное направление можно поэтому взять произвольно. Такое направление обычно принимают за ось Z, так как в этом случае оператор $\hat{l}_z$ выражается наиболее простой формулой. Для решения поставленного вопроса служит уравнение

$$\hat{l}_z\psi = l_z\psi,$$

или

$$-i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = l_z\psi, \tag{31.8}$$

где l_z — постоянная. Его решением является

$$\psi = C(r, \vartheta) \exp\left(i \frac{l_z}{\hbar} \varphi\right). \tag{31.9}$$

В силу требуемой однозначности ψ эта функция должна возвращаться к своему исходному значению, когда аргумент φ получает приращение 2π, ибо такое приращение возвращает исходную точку в начальное положение. Таким образом, должно быть

$$\exp\left(i \frac{l_z}{\hbar} \varphi\right) = \exp\left\{i \frac{l_z}{\hbar} (\varphi + 2\pi)\right\}.$$

Так как показательная функция периодична с периодом $2\pi i$, то это равенство может выполняться только при условии

$$i \frac{l_z}{\hbar} 2\pi = m \cdot 2\pi i,$$

или

$$l_z = m\hbar, \tag{31.10}$$

где m — целое положительное или отрицательное число, включая и нуль ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Равенство (31.10) означает, что проекция углового момента на любое направление квантуется. Для сокращения за единицу углового момента обычно принимают постоянную $\hbar$. При таком соглашении говорят, что проекция углового момента на избранное направление может принимать только целочисленные значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Проекцию углового момента на ось Z принято обозначать через m_z. Таким образом, $m_z = m$.

Правило (31.10) по своей форме аналогично соответствующему правилу квантования момента импульса (13.6) в теории Бора. Однако между этими двумя правилами есть глубокое различие. В формуле (13.6) под L следует понимать полный момент импульса частицы (электрона), тогда как в (31.10) речь идет только об одной проекции момента импульса на какое-либо направление, а самого вектора момента импульса, как точно определенной величины, вообще не существует.

4. Нетрудно непосредственно проверить, что собственная функция оператора $\hat{l}_z$, т. е. функция (31.9), не может быть одновременно собственной функцией ни оператора $\hat{l}_x$, ни оператора $\hat{l}_y$. Допустим противоположное, что (31.9) является собственной функцией, например, оператора $\hat{l}_x$. Для этой функции имеем

$$\hat{l}_x \psi = i\hbar \left(\sin\varphi \frac{\partial C}{\partial \vartheta} + im \operatorname{ctg}\vartheta \cos\varphi\, C\right) e^{im\varphi}.$$

Этот результат не может быть представлен в виде $l_x\psi$, как мы предположили (l_x — постоянное число). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть частный случай, когда $\varphi = 0$. Тогда

$$\hat{l}_x \psi = -\hbar m \operatorname{ctg}\vartheta\, \psi.$$

С другой стороны, по нашему предположению должно быть

$$\hat{l}_x\psi = l_x\psi.$$

И оба эти соотношения должны соблюдаться при любых значениях угла ϑ, что, очевидно, невозможно. Такое же рассуждение применимо для оператора $\hat{l}_y$. Это подтверждает прежний результат, что не существует волновой функции Ψ, которая была бы одновременно собственной функцией операторов $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$. Исключением является только случай, когда функция Ψ сферически симметрична, т. е. зависит только от r. В этом случае Ψ будет собственной функцией всех трех операторов $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$, а все три проекции углового момента m_x, m_y, m_z обратятся в нуль.

5. Второй величиной наряду с проекцией m_z, характеризующей величину углового момента, является *квадрат полного углового момента*. Его принято обозначать через l^2. Но это не есть квадрат вектора $\boldsymbol{l}$ (которого не существует), а *собственное значение квадрата оператора углового момента*, т. е.

$$\hat{l}^2 = (\hat{l}_x\boldsymbol{i} + \hat{l}_y\boldsymbol{j} + \hat{l}_z\boldsymbol{k})^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2. \tag{31.11}$$

Поэтому общепринятое обозначение l^2 неудачно, но мы не будем его менять. Однако истинный смысл величины l^2, как собственного значения квадрата оператора углового момента $\hat{l}^2$, надо постоянно иметь в виду.

Чтобы убедиться, что величины l^2 и m_z могут быть измерены в одном и том же состоянии, надо показать, что операторы $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ коммутируют друг с другом. Для этого пишем

$$\hat{l}^2\hat{l}_z = (\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2)\hat{l}_z = \hat{l}_x(\hat{l}_x\hat{l}_z) + \hat{l}_y(\hat{l}_y\hat{l}_z) + \hat{l}_z^3,$$

или в силу соотношений коммутации (31.6)

$$\hat{l}^2\hat{l}_z = \hat{l}_x(\hat{l}_z\hat{l}_x - i\hbar\hat{l}_y) + \hat{l}_y(\hat{l}_z\hat{l}_y + i\hbar\hat{l}_x) + \hat{l}_z^3.$$

Аналогично

$$\hat{l}_z\hat{l}^2 = (\hat{l}_x\hat{l}_z + i\hbar\hat{l}_y)\hat{l}_x + (\hat{l}_y\hat{l}_z - i\hbar\hat{l}_x)\hat{l}_y + \hat{l}_z^3.$$

Почленным вычитанием находим

$$\hat{l}^2\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{l}^2 = 0, \tag{31.12}$$

что и требовалось доказать. Разумеется, такое же соотношение коммутации справедливо и для операторов $\hat{l}_x$ и $\hat{l}_y$.

Итак, *существует состояние, в котором одновременно имеют определенные значения квадрат углового момента l^2 и одна из его проекций на избранное направление*. Обычно это направление принимают за ось Z.

Рассмотрим какое-либо состояние Ψ, в котором величины l^2 и m_z (а следовательно, и m_z^2) одновременно имеют определенные

значения. Докажем, что в этом состоянии всегда (за исключением случая $l^2 = 0$) $l^2 > m_z^2$. С этой целью рассмотрим операторное равенство

$$\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2.$$

Для оператора $\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2$ функция Ψ является собственной с собственным значением $l^2 - m_z^2$. То же значение имеет и соответствующая средняя величина. Поэтому, производя усреднение по формуле (30.21), получим

$$l^2 - m_z^2 = \int \Psi^* (\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2) \Psi \, dV.$$

Но интеграл справа существенно положителен, так как он представляет среднее значение существенно положительной величины $l_x^2 + l_y^2$ в состоянии Ψ. Итак,

$$l^2 > m_z^2. \tag{31.13}$$

Поэтому угловой момент не может ориентироваться точно вдоль оси Z. В любом состоянии он всегда содержит проекции l_x и l_y, которые, однако, в рассматриваемом состоянии остаются неопределенными. Это — уже известный нам факт, согласно которому не существует состояния, в котором все три проекции l_x, l_y, l_z имеют определенные значения.

Про этот факт иногда говорят, что в собственном состоянии, где l^2 имеет определенное значение, угловой момент сохраняет свою длину, равную $\sqrt{l^2}$, но его направление испытывает флуктуации. Вряд ли этот способ выражения можно признать удачным, ибо он предполагает, что существует какой-то вектор $\boldsymbol{l}$, имеющий в каждый момент времени определенную длину и направление, но это направление беспорядочно и непрерывно меняется во времени. На самом деле, как мы видели, такого вектора не существует, а потому картина его флуктуаций не соответствует действительности.

6. Остается определить собственные значения l^2 оператора квадрата углового момента $\hat{l}^2$. Это можно сделать с помощью одних только правил коммутации (31.6). Приведем сначала эти правила к другому виду, более удобному для нашей цели. Введем два оператора:

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \quad \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y. \tag{31.14}$$

Тогда из (31.6) нетрудно получить

$$\hat{l}_+\hat{l}_- - \hat{l}_-\hat{l}_+ = 2\hbar\hat{l}_z, \; \hat{l}_z\hat{l}_+ - \hat{l}_+\hat{l}_z = \hbar\hat{l}_+, \; \hat{l}_z\hat{l}_- - \hat{l}_-\hat{l}_z = -\hbar\hat{l}_-. \tag{31.15}$$

Далее

$$\hat{l}^2 = \left(\frac{\hat{l}_+ + \hat{l}_-}{2}\right)^2 + \left(\frac{\hat{l}_+ - \hat{l}_-}{2i}\right)^2 + \hat{l}_z^2$$

или

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z = \hat{l}_-\hat{l}_+ + \hat{l}_z^2 + \hbar\hat{l}_z. \tag{31.16}$$

Так как l^2 есть величина ограниченная, то из (31.13) следует, что m_z^2, а потому и m_z суть также величины ограниченные. Обозначим через l наибольшее положительное значение проекции m_z при заданном значении квадрата момента l^2. Пусть Ψ — общая волновая функция операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$, причем собственное значение оператора $\hat{l}_z$ равно m. В этом предположении

$$\hat{l}^2\Psi = l^2\Psi, \quad \hat{l}_z\Psi = \hbar l\Psi. \tag{31.17}$$

Из соотношений коммутации (31.15) для такой функции получаем

$$\hat{l}_z\hat{l}_\pm\Psi = (\hat{l}_\pm\hat{l}_z \pm \hbar\hat{l}_\pm)\Psi = \hbar(l \pm 1)\, l_\pm\Psi.$$

Отсюда видно, что функции $\hat{l}_+\Psi$ и $\hat{l}_-\Psi$ являются собственными функциями оператора $\hat{l}_z$, имеющими собственные значения $\hbar(l+1)$ и $\hbar(l-1)$ соответственно. Но величина $\hbar(l+1)$ не может быть собственным значением оператора $\hat{l}_z$, так как по предположению наибольшее собственное значение этого оператора равно $\hbar l$. Таким образом, равенство

$$\hat{l}_z\hat{l}_+\Psi = \hbar(l+1)\hat{l}_+\Psi$$

невозможно. Но это равенство логически следует из соотношений коммутации (31.15) и уравнения $\hat{l}_z\Psi = l\Psi$. Избежать противоречия можно только тогда, когда $\hat{l}_+\Psi = 0$, ибо в этом случае указанное равенство, конечно, будет удовлетворено. Но из этого следует, что $\hat{l}_-\hat{l}_+\Psi = 0$, или в силу соотношения (31.16)

$$(\hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z)\Psi = 0.$$

Но в силу (31.17) $\hat{l}_z^2\Psi = \hbar^2 l^2\Psi$, $\hbar\hat{l}_z\Psi = \hbar^2 l\Psi$, так что

$$(\hat{l}^2 - \hbar^2 l^2 - \hbar^2 l)\Psi = 0,$$

или

$$\hat{l}^2\Psi = \hbar^2 l(l+1)\Psi.$$

Значит Ψ есть собственная функция оператора квадрата углового момента с собственным значением

$$l^2 = \hbar^2 l(l+1). \tag{31.18}$$

7. Пусть квадрат углового момента l^2 имеет определенное значение $l(l+1)$. Во скольких состояниях может реализоваться такая ситуация, если в них проекция m также имеет определенное значение? Очевидно, в таких состояниях m может принимать следующие значения:

$$m = -l,\ -(l-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ +(l-1),\ +l,$$

т. е. всего таких состояний будет $2l+1$.

Полученные результаты, определяющие возможные значения l_z и $\boldsymbol{l}^2$, называют *пространственным квантованием*. Этот термин заимствован из старой теории Бора, в которой пространственное квантование определяло возможные направления вектора углового момента $\boldsymbol{l}$ в пространстве. С точки зрения квантовой механики термин «пространственное квантование» вряд ли удачен, так как «вектор» $\boldsymbol{l}$ принципиально не имеет определенных направлений в пространстве. Для наглядности пространственное квантование обычно представляют графически на *векторных диаграммах*. По оси Z откладывают возможные значения m, рассматривая их как проекции вектора $\boldsymbol{l}$ длины $\sqrt{l(l+1)}$, имеющего дискретные направления в пространстве. В качестве

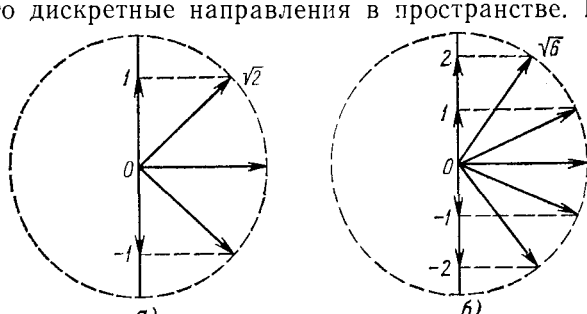

Рис. 58

примера на рис. 58 приведены векторные диаграммы для случаев $l=1$ и $l=2$ (за единицу углового момента принята постоянная Планка $\hbar$). Эти диаграммы нельзя понимать буквально. Они правильно передают только два факта: возможные значения проекции m и возможные значения квадрата углового момента $\boldsymbol{l}^2$.

Квантовое число l по причинам, которые выяснятся ниже, называют *орбитальным квантовым числом*, а число m — магнитным квантовым числом.

8. В классической механике кинетическая энергия вращающегося твердого тела определяется формулой

$$\mathscr{E}=\boldsymbol{l}^2/2I,$$

где I — момент инерции тела относительно соответствующей оси вращения. Такая же формула справедлива и в квантовой механике. Различие состоит в том, что здесь величина $\boldsymbol{l}^2$ квантуется, принимая дискретные значения $\boldsymbol{l}^2=\hbar^2 l(l+1)$. Неизменяемая вращающаяся система в квантовой механике называется *ротатором*. Таким образом, энергетические уровни ротатора дискретны и определяются формулой

$$\mathscr{E}_r=\frac{\hbar^2}{2I}l(l+1). \qquad (31.19)$$

Такой формулой мы уже пользовались при качественном рассмотрении вращательной теплоемкости молекул (см. т. II, § 69).

Впрочем, необходимо заметить, что идеализированное представление о ротаторе, как и представление об идеально твердом теле, несовместимо с принципом неопределенностей Гейзенберга. В самом деле, в модели идеально твердого тела его размеры в любом направлении (например, в направлении оси X) строго определены и не могут меняться во времени, т. е. неопределенность координаты $\Delta x = 0$. Но тогда для импульса в том же направлении из соотношения неопределенностей следует, что $\Delta p_x = \infty$. В теле неизбежно возникнут колебания, меняющие величину момента инерции I. Например, вращающуюся молекулу можно для некоторых целей рассматривать как жесткий ротатор и пользоваться формулой (31.19), если изменения I, связанные с вращением, невелики.

§ 32. Сложение угловых моментов

1. Понятие углового момента можно распространить и на системы частиц. Ради простоты будем предполагать, что система состоит только из двух частиц: 1 и 2. Координаты (радиус-вектор) первой частицы обозначим через $\boldsymbol{r}_1$, второй — через $\boldsymbol{r}_2$. Оператором углового момента $\hat{\boldsymbol{l}}$ системы называют сумму операторов угловых моментов ее частей $\hat{\boldsymbol{l}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{l}}_2$:

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{l}}_1 + \hat{\boldsymbol{l}}_2. \tag{32.1}$$

Так же определяется и оператор проекции углового момента системы на избранное направление. Например,

$$\hat{l}_z = \hat{l}_{1z} + \hat{l}_{2z}. \tag{32.2}$$

Будем предполагать, что частицы не взаимодействуют между собой. Тогда волновая функция первой частицы $\Psi_1(\boldsymbol{r}_1)$ будет одна и та же независимо от того, есть вторая частица или нет. Эту функцию можно умножить на произвольную постоянную, которая может зависеть от $\boldsymbol{r}_2$ как от параметра. В частности, за нее можно принять волновую функцию $\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$ второй частицы. Тогда волновая функция первой частицы представится произведением $\Psi = \Psi_1(\boldsymbol{r}_1)\Psi_2(\boldsymbol{r}_2)$. Но очевидно из тех же соображений, что в таком же виде представится и волновая функция второй частицы. Поэтому $\Psi = \Psi_1\Psi_2$ можно рассматривать как волновую функцию системы невзаимодействующих частиц 1 и 2. При этом для нее будет сохранена нормировка

$$\int |\Psi|^2 dV_1\, dV_2 = \int |\Psi_1|^2 dV_1 \int |\Psi_2|^2 dV_2 = 1. \tag{32.3}$$

2. Если ограничиться действием операторов только на функцию $\Psi = \Psi_1\Psi_2$, то из доказанного следует, что операторы $\hat{\boldsymbol{l}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{l}}_2$