

и доступен наблюдению. Плотность самого электрического тока в атоме, в отличие от потока вероятности, конечно, — величина наблюдаемая, но для ее однозначного определения *одного* нерелятивистского уравнения Шредингера недостаточно. Неоднозначность можно устранить, но для этого надо перейти к *релятивистской теории*. В самом деле, величина  $\rho$  по своему смыслу есть величина однозначная. А в релятивистской теории скаляр  $\rho$  и три компоненты вектора  $j$  объединяются в один *релятивистски инвариантный четырехмерный вектор*, временной компонентой которого является  $\rho$ .

### § 36. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона

1. Наличие у атомов магнитных моментов и их квантование было доказано прямыми опытами Штерна и Герлаха (1889—1979) в 1921 г. В сосуде с высоким вакуумом создавался с помощью диафрагм  $B$  и  $B'$  (рис. 64) резко ограниченный атомный пучок исследуемого элемента, испаряющегося в печи  $K$ .

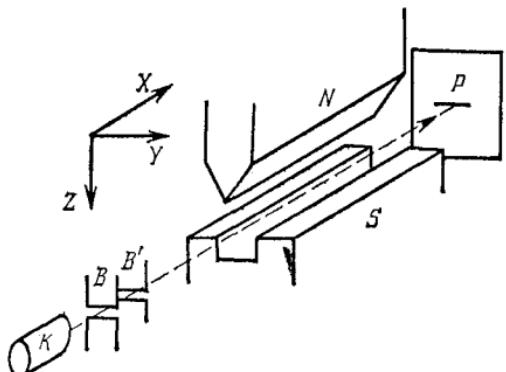


Рис. 64

Пучок проходил через сильное магнитное поле  $H$  между полюсными наконечниками  $N$  и  $S$  электромагнита. Один из наконечников ( $N$ ) имел вид призмы с острым ребром, а вдоль другого ( $S$ ) была выточена канавка. Благодаря такой конструкции полюсных наконечников магнитное поле получалось *сильно неоднородным*.

После прохождения через магнитное поле пучок попадал на фотопластинку  $P$  и оставлял на ней след.

Рассчитаем поведение атомного пучка сначала с классической точки зрения, предполагая, что никакого квантования магнитных моментов нет. Если  $m$  — магнитный момент атома, то на атом в неоднородном магнитном поле действует сила

$$\mathbf{f} = (m \nabla) \mathbf{H}.$$

Направим ось  $Z$  вдоль магнитного поля (т. е. от  $N$  к  $S$  перпендикулярно к полюсным наконечникам). Тогда проекция силы в этом направлении будет

$$f_z = m_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + m_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + m_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Первые два слагаемых в этом выражении не играют роли. В самом деле, по классическим представлениям атом в магнитном поле совершает прецессию вокруг оси  $Z$ , вращаясь с ларморовской частотой

$$\Omega = -eH/2\mu c$$

(заряд электрона обозначен  $-e$ ). Поэтому проекции  $m_x$  и  $m_y$  совершают колебания с той же частотой, становясь попеременно положительными, то отрицательными. Если угловая скорость прецессии достаточно велика, то силу  $\bar{f}_z$  можно усреднить по времени. При этом первые два члена в выражении для  $\bar{f}_z$  обращаются в нуль, и можно написать

$$\bar{f}_z = m_z \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (36.1)$$

Чтобы составить представление о степени допустимости такого усреднения, произведем численную оценку. Период ларморской прецессии равен

$$\tau = \frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{4\pi mc}{eH} \approx \frac{7 \cdot 10^{-7}}{H} \text{ с},$$

где поле  $H$  измеряется в гауссах. Например, при  $H = 1000$  Гс получаем  $\tau \approx 7 \cdot 10^{-10}$  с. Если скорость атомов в пучке равна  $v = 100$  м/с  $= 10^4$  см/с, то за это время атом пролетает расстояние  $x \approx 7 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-5}$  см, пренебрежимо малое по сравнению со всеми характерными размерами установки. Это и доказывает применимость проведенного усреднения.

Но формула (36.1) может быть оправдана и с квантовой точки зрения. В самом деле, включение сильного магнитного поля вдоль оси  $Z$  приводит к состоянию атома только с одной определенной составляющей магнитного момента, а именно  $m_z$ . Остальные две составляющие  $m_x$  и  $m_y$  в этом состоянии не могут иметь определенных значений. При измерениях в этом состоянии  $m_x$  и  $m_y$  получили бы различные значения и притом их средние были бы равны нулю. Поэтому и при квантовом рассмотрении усреднение (36.1) оправдано.

2. Тем не менее следует ожидать различных результатов опыта с классической и с квантовой точек зрения. В опытах Штерна и Герлаха сначала получался след атомного пучка при выключенном магнитном поле, а затем при включенном. Если бы проекция  $m_z$  могла принимать всевозможные непрерывные значения, как требует классическая теория, то сила  $\bar{f}_z$  также принимала бы всевозможные непрерывные значения. Включение магнитного поля приводило бы только к *широкому пучку*. Не то следует ожидать по квантовой теории. В этом случае проекция  $m_z$ , а с ней и средняя сила  $\bar{f}_z$  *квантованы*, т. е. могут принимать только ряд дискретных избранных значений. Если орбитальное квантовое число атома равно  $l$ , то по теории при расщеплении получится  $2l + 1$  пучков (т. е. оно равно числу возможных значений, которые может принимать квантовое число  $m$ ). Таким образом, в зависимости от значения числа  $l$  следовало бы ожидать, что *пучок расщепится на 1, 3, 5, ... составляющих*. Ожидаемое число составляющих должно было бы быть *всегда нечетным*.

Опыты Штерна и Герлаха доказали квантование проекции  $m_z$ . Однако их результаты не всегда соответствовали теории, изложенной выше. В первоначальных опытах применялись пучки атомов серебра. В магнитном поле пучок расщеплялся на две составляющие. То же получалось для атомов водорода. Для атомов других химических элементов получалась и более сложная картина расщепления, однако число расщепленных пучков получалось *не только нечетным*, что требовалось теорией, *но и четным*, что противоречило ей. В теорию необходимо было внести корректизы.

3. К этому следует добавить результаты опытов Эйнштейна и де Гааза (1878—1966), а также опытов Барнета (1873—1956) по определению гиromагнитного отношения, которые были изложены в т. III (§ 78). Для железа, например, оказалось, что гиromагнитное отношение равно

$$\frac{m}{L} = \left| \frac{e}{\mu_e c} \right|, \quad (36.2)$$

т. е. вдвое больше, чем требуется по теории.

Наконец, оказалось, что спектральные термы щелочных металлов имеют так называемую *дублетную структуру*, т. е. состоят из двух близко расположенных уровней. Для описания этой структуры трех квантовых чисел  $n$ ,  $l$ ,  $m$  оказалось недостаточно — потребовалось *четвертое квантовое число*. Это явилось главным мотивом, послужившим Уленбеку (р. 1900) и Гаудсмиту (1902—1979) в 1925 г. для введения гипотезы о *спине электрона*<sup>1</sup>). Сущность этой гипотезы состоит в том, что у электрона есть не только момент количества движения и магнитный момент, связанные с перемещением этой частицы как целого. Электрон имеет также *собственный или внутренний механический момент количества движения*, напоминая в этом отношении классический волчок. Этот собственный момент количества движения и называется *спином* (от английского слова *to spin* — вертеться). Соответствующий ему магнитный момент называется *спиновым магнитным моментом*. Эти моменты обозначаются соответственно через  $L_s$  и  $m_s$  в отличие от орбитальных моментов  $L_l$  и  $m_l$ . Спин чаще обозначают просто через  $s$ .

В опытах Штерна и Герлаха атомы водорода находились в *s*-состоянии, т. е. не обладали орбитальными моментами. Магнитный момент ядра пренебрежимо мал. Поэтому Уленбек и Гаудсмит предположили, что расщепление пучка обусловлено не орбитальным, а *спиновым магнитным моментом*. То же самое относится к опытам с атомами серебра. Атом серебра имеет единственный наружный электрон. Атомный остов ввиду его

<sup>1)</sup> Гипотеза о спине электрона ранее вводилась Кронигом (р. 1904), но его работа не была опубликована.

симметрии спиновым и магнитным моментами не обладает. Весь магнитный момент атома серебра создается только одним наружным электроном. Когда атом находится в нормальном, т. е.  $s$ -состоянии, то орбитальный момент валентного электрона равен нулю — весь момент является спиновым.

4. Самы Уленбек и Гаудсмит предполагали, что спин возникает из-за вращения электрона вокруг собственной оси. Существовавшая в то время модель атома получила еще большее сходство с Солнечной системой. Электроны (планеты) не только вращаются вокруг ядра (Солнца), но и вокруг собственных осей. Однако сразу же выяснилась несостоятельность такого классического представления о спине (см. задачу 1 к этому параграфу). Паули систематически ввел спин в квантовую механику, но исключил всякую возможность классического истолкования этой величины. В 1928 г. Дирак показал, что спин электрона автоматически содержится в его теории электрона, основанной на релятивистском волновом уравнении. В теории Дирака содержится также и спиновый магнитный момент электрона, причем для гиromагнитного отношения получается значение, соглашающееся с опытом. При этом о внутренней структуре электрона ничего не говорилось — последний рассматривался как точечная частица, обладающая лишь зарядом и массой. Таким образом, спин электрона оказался квантово-релятивистским эффектом, не имеющим классического истолкования. Затем концепция спина, как внутреннего момента количества движения, была распространена на другие элементарные и сложные частицы и нашла подтверждение и широкие применения в современной физике.

5. Разумеется, в общем курсе физики нет возможности вдаваться в подробную и строгую теорию спина. Мы примем в качестве исходного положения, что спину  $s$  соответствует векторный оператор  $\hat{s}$ , проекции которого  $\hat{s}_x$ ,  $\hat{s}_y$ ,  $\hat{s}_z$  удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям (31.2), что и проекции оператора орбитального момента, т. е.

$$\begin{aligned}\hat{s}_y \hat{s}_z - \hat{s}_z \hat{s}_y &= i\hbar \hat{s}_x, \\ \hat{s}_z \hat{s}_x - \hat{s}_x \hat{s}_z &= i\hbar \hat{s}_y, \\ \hat{s}_x \hat{s}_y - \hat{s}_y \hat{s}_x &= i\hbar \hat{s}_z.\end{aligned}\tag{36.3}$$

Из них следует, что определенные значения в одном и том же состоянии могут иметь квадрат полного спина  $s^2$  и одна из его проекций на определенную ось (принимаемую обычно за ось  $Z$ ). Если максимальное значение проекции  $s_z$  (в единицах  $\hbar$ ) равно  $s$ , то число всех возможных проекций, соответствующих данному  $s$ , будет равно  $2s + 1$ . Опыты Штерна и Герлаха показали, что для электрона это число равно 2, т. е.  $2s + 1 = 2$ , откуда  $s = 1/2$ . Максимальное значение, которое может принимать

проекция спина на избранное направление (в единицах  $\hbar$ ), т. е. число  $s$ , и принимается за значение спина частицы.

Спин частицы может быть либо целым, либо полуцелым. Для электрона, таким образом, спин равен  $1/2$ . Из перестановочных соотношений (36.3) следует, что квадрат спина частицы равен  $s^2 = s(s+1)$ , а для электрона  $s^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$  (в единицах  $\hbar^2$ ).

Измерения проекции магнитного момента  $m_z$  по методу Штерна и Герлаха показали, что для атомов водорода и серебра величина  $m_z$  равна магнетону Бора  $m_B$ , т. е. (35.12). Таким образом, гиromагнитное отношение для электрона

$$\left| \frac{m_z}{L_z} \right| = \frac{m_B}{\hbar/2} = \frac{e}{\mu_e c}$$

в согласии с (36.2).

### ЗАДАЧИ

1. С классической точки зрения спин электрона пытались истолковать как момент количества движения, возникающий из-за вращения электрона вокруг своего диаметра. Электрон считался шариком, его масса определялась по релятивистской формуле  $\mathcal{E} = \mu c^2$ , причем принималось, что собственная энергия электрона имеет чисто электростатическое происхождение. Проанализировать трудности, возникающие при таком классическом истолковании спина.

Решение. Момент количества движения электрона при его вращении  $L = \hbar/2 = I\omega$ , где  $I$  — момент инерции электрона относительно диаметра, а  $\omega$  — угловая скорость. Очевидно,  $I < \mu r^2$ , так как максимальное значение  $I$  получилось бы, если бы вся масса электрона была распределена по окружности, а именно по экватору вращающегося электрона. Таким образом,

$$\hbar/2 < \mu r^2 \omega, \text{ откуда } v > \hbar/2\mu r,$$

где  $v = \omega r$  — максимальная линейная скорость на поверхности электрона. Масса электрона  $\mu = \mathcal{E}/c^2$ . При определении собственной энергии электрона  $\mathcal{E}$  возникает трудность. Величина  $\mathcal{E}$  зависит от распределения полного заряда  $e$  электрона по его объему. Минимальное значение  $\mathcal{E} = e^2/2r$  получится при распределении заряда  $e$  по поверхности электрона. При равномерном распределении заряда по объему электрона получилось бы  $\mathcal{E} = \frac{3}{5}e^2/r$ . Примем, что  $\mathcal{E} = e^2/r$ . Тогда

$$v = \frac{\hbar}{2\mathcal{E}r/c^2} > \frac{\hbar c^2}{2e^2} = \frac{c}{2\alpha},$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c$  — безразмерная величина, называемая *постоянной тонкой структуры* ( $\alpha \approx 1/137$ ). Таким образом, при сделанных предположениях  $v > 68,5 \text{ с}$ , т. е.  $v$  больше скорости света  $c$ , что невозможно.

2. Показать, что методом Штерна и Герлаха измерить магнитный момент электрона невозможно, если опыт производится со *свободным электроном*, а не с электроном, связанным с атомом.

Решение. Поперечные размеры пучка частиц  $\Delta x$  во всех направлениях должны удовлетворять условию  $\Delta x \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны де Бройля для этих частиц. В противном случае пучок быстро размывается из-за дифракции. В опыте Штерна и Герлаха производится отклонение (расщепление) пучка атомов (точнее, ионов с зарядом  $e$ ) в направлении оси  $Z$  (рис. 64). Средняя сила, вызывающая это отклонение, определяется выражением (36.1). Если учесть уравнение  $\partial H_y/\partial y + \partial H_z/\partial z = 0$  (в направлении оси  $X$  магнитное поле

можно считать равным нулю), то эту силу можно представить в виде

$$\tilde{f}_z = -m_z \frac{\partial H_y}{\partial y}. \quad (36.4)$$

Если атом движется в плоскости  $ZX$  со скоростью  $v$ , то ввиду симметрии вектор  $H$  лежит в той же плоскости. Поэтому сила Лоренца  $(e/c)[vH]$  будет направлена вдоль оси  $Y$ . Она вызовет смещение пучка вправо или влево вдоль той же оси. В рассматриваемом вопросе это не имеет значения, существенно лишь смещение пучка вдоль оси  $Z$ . Но если частица смещена в сторону на  $\Delta y$  от плоскости  $ZX$ , то появится слагающая силы Лоренца и вдоль оси  $Z$ , а именно

$$(f_{\text{Лор}})_z = -\frac{e}{c} v H_y.$$

В первом приближении  $H_y = (\partial H_y / \partial y) \Delta y$ , так что

$$(f_{\text{Лор}})_z = -\frac{ev}{c} \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta y. \quad (36.5)$$

Смещения частицы  $\Delta_1 z$  и  $\Delta_2 z$ , вызываемые силами (36.4) и (36.5), относятся как

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\tilde{f}_z}{(f_{\text{Лор}})_z} = \frac{m_z}{(ev/c) \Delta y}.$$

Считая, что атом — однозарядный ион, в качестве  $m_z$  следует взять магнетон Бора (35.12). Тогда

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\hbar}{2\mu_e v \Delta y}.$$

Если  $\mu_a$  — масса атома, то

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_a}{\mu_e} \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (36.6)$$

где  $\lambda$  — длина волны де Бройля для атома:  $\lambda = h/\mu_a v$ .

В отсутствие магнитного поля щель, образуемая диафрагмами  $B$  и  $B'$ , изобразится на пластинке  $P$  горизонтальной полоской. При включении неоднородного магнитного поля центр полоски сместится силой  $\tilde{f}_z$ . Нецентральные точки полоски испытывают дополнительные смещения под действием силы Лоренца. Максимальные дополнительные смещения, и притом в противоположные стороны, получат края полоски. В результате полоска на пластинке  $P$  перекосится. Для применимости метода Штерна и Герлаха необходимо, чтобы перекос был мал. Это значит, что должно выполняться условие  $|\Delta_1 z| \gg \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$ , где  $|\Delta_2 z|_{\text{макс}}$  — смещение края полоски, вызываемое силой Лоренца, т. е. ее значением при  $|\Delta y| = |\Delta y|_{\text{макс}}$ . Для свободного электрона  $\mu_a = \mu_e$ , и (36.6) дает  $\Delta_1 z / \Delta_2 z = \lambda / (4\pi \Delta y)$ . В этом случае условию  $|\Delta_1 z| \gg \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$  удовлетворить невозможно, поскольку должно быть  $|\Delta y|_{\text{макс}} \gg \gg \lambda$ . Но удовлетворить ему оказывается возможным в случае атомов из-за того, что отношение  $\mu_a / \mu_e$  очень велико. Это и используется в методе Штерна и Герлаха.

## § 37. Эффект Садовского и спин фотона

1. В 1889 г. русский физик А. И. Садовский (1859—1921) теоретически предсказал, что свет, поляризованный по кругу или эллиптически, должен обладать моментом количества движения. Этот результат проще всего понять, исходя из закона сохране-