можно считать равным нулю), то эту силу можно представить в виде

$$\bar{f}_z = -\mathfrak{m}_z \frac{\partial H_y}{\partial y}. \tag{36.4}$$

Если атом движется в плоскости ZX со скоростью $\boldsymbol{v}$, то ввиду симметрии вектор $\boldsymbol{H}$ лежит в той же плоскости. Поэтому сила Лоренца $(e/c)[\boldsymbol{vH}]$ будет направлена вдоль оси Y. Она вызовет смещение пучка вправо или влево вдоль той же оси. В рассматриваемом вопросе это не имеет значения, существенно лишь смещение пучка вдоль оси Z. Но если частица смещена в сторону на Δy от плоскости ZX, то появится слагающая силы Лоренца и вдоль оси Z, а именно

$$(\bar{f}_{\text{Лор}})_z = -\frac{e}{c} v H_y.$$

В первом приближении $H_y = (\partial H_y/\partial y)\Delta y$, так что

$$(\bar{f}_{\text{Лор}})_z = -\frac{ev}{c}\frac{\partial H_y}{\partial y}\Delta y. \tag{36.5}$$

Смещения частицы $\Delta_1 z$ и $\Delta_2 z$, вызываемые силами (36.4) и (36.5), относятся как

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\bar{f}_z}{(\bar{f}_{\text{Лор}})_z} = \frac{\mathfrak{m}_z}{(ev/c)\,\Delta y}.$$

Считая, что атом — однозарядный ион, в качестве $\mathfrak{m}_z$ следует взять магнетон Бора (35.12). Тогда

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\hbar}{2\mu_e v\,\Delta y}.$$

Если μ_a — масса атома, то

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mu_a}{\mu_e}\frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{36.6}$$

где λ — длина волны де Бройля для атома: $\lambda = h/\mu_a v$.

В отсутствие магнитного поля щель, образуемая диафрагмами B и B', изобразится на пластинке P горизонтальной полоской. При включении неоднородного магнитного поля центр полоски сместится силой $\bar{f}_z$. Нецентральные точки полоски испытают дополнительные смещения под действием силы Лоренца. Максимальные дополнительные смещения, и притом в противоположные стороны, получат края полоски. В результате полоска на пластинке P перекосится. Для применимости метода Штерна и Герлаха необходимо, чтобы перекос был мал. Это значит, что должно выполняться условие $|\Delta_1 z| \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$, где $|\Delta_2 z|_{\text{макс}}$ — смещение края полоски, вызываемое силой Лоренца, т. е. ее значением при $|\Delta y| = |\Delta y|_{\text{макс}}$. Для свободного электрона $\mu_a = \mu_e$, и (36.6) дает $\Delta_1 z/\Delta_2 z = \lambda/(4\pi\,\Delta y)$. В этом случае условию $|\Delta_1 z| \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$ удовлетворить невозможно, поскольку должно быть $|\Delta y|_{\text{макс}} \gg \lambda$. Но удовлетворить ему оказывается возможным в случае атомов из-за того, что отношение μ_a/μ_e очень велико. Это и используется в методе Штерна и Герлаха.

§ 37. Эффект Садовского и спин фотона

1. В 1889 г. русский физик А. И. Садовский (1859—1921) теоретически предсказал, что свет, поляризованный по кругу или эллиптически, должен обладать моментом количества движения. Этот результат проще всего понять, исходя из закона сохране-

ния момента количества движения. Согласно этому закону полный момент количества движения замкнутой системы должен оставаться постоянным. Рассмотрим эффект Садовского сначала *с классической точки зрения.*

Допустим, что электрический заряд e вращается по окружности радиуса r вокруг другого неподвижного заряда той же величины, но противоположного знака. Как известно, при вращении по окружности полная энергия, складывающаяся из кинетической и потенциальной, равна $\mathscr{E} = -e^2/2r$, т. е. половине потенциальной энергии заряда. Вращение по окружности есть движение ускоренное, а потому по законам классической электродинамики заряд e должен излучать электромагнитные волны. При наличии излучения заряд уже не может двигаться точно по окружности. Он будет непрерывно приближаться к ее центру. Предположим, что за время одного оборота уменьшение расстояния r заряда до центра окружности очень мало по сравнению с r. Тогда движение заряда e все еще можно охарактеризовать как вращение по окружности, радиус которой непрерывно уменьшается. Изменения энергии $\mathscr{E}$ и радиуса r при этом связаны соотношением

$$d\mathscr{E} = \frac{e^2}{2r^2}\,dr.$$

Вращающийся заряд обладает моментом количества движения $L = \mu r^2\omega$, где μ — масса, а ω — круговая частота. При движении по окружности $\mu\omega^2 r = e^2/r^2$, откуда

$$\omega = e/(\mu r^3)^{1/2},$$

и следовательно,

$$L = e\,(\mu r)^{1/2}.$$

Значит,

$$dL = \frac{e\mu^{1/2}}{2r^{1/2}}\,dr, \qquad \frac{d\mathscr{E}}{dL} = \frac{e}{(\mu r^3)^{1/2}} = \omega.$$

Итак, при движении заряда по окружности его энергия и момент количества движения уменьшаются, причем их изменения связаны соотношением

$$\frac{d\mathscr{E}}{dL} = \omega. \tag{37.1}$$

Полная энергия и момент количества движения замкнутой системы должны оставаться постоянными. Система состоит из вещества и его излучения, которые могут обмениваться друг с другом и энергией, и моментом количества движения. Поэтому из постоянства этих величин для всей системы следует, что при изменении r на dr излучение уносит энергию $-d\mathscr{E}$ и момент количества движения $-dL$.

Структура излучения, конечно, определяется процессами, происходившими в излучателе. Но если излучение уже отдели-

лось от излучателя, то теряется связь его с излучателем. Излучение продолжает существовать уже как самостоятельная система. Соотношение между его энергией и моментом количества движения поэтому есть *внутреннее свойство только самого отделившегося излучения.* Отсюда следует, что при рассмотренном нами способе возбуждения излучения его энергия $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ и момент количества движения $L_{\text{изл}}$ должны быть связаны соотношением

$$\mathscr{E}_{\text{изл}}/L_{\text{изл}} = \omega = 2\pi c/\lambda. \tag{37.2}$$

2. Излучение, отделившееся от излучателя, в нашем случае имеет довольно сложную структуру. Его интенсивность и поляризация по разным направлениям не одинаковы. В направлении, перпендикулярном к плоскости окружности, по которой вращается заряд e, излучение *поляризовано по кругу*, в плоскости окружности оно *поляризовано линейно*, а во всех остальных направлениях — *эллиптически.* Можно, конечно, преобразовать все излучение в плоскую бегущую волну, поляризованную по кругу. Для этого можно, например, поместить центр окружности, по которой вращается излучающий заряд, в фокусе бесконечного идеально отражающего параболического зеркала, чтобы плоскость окружности была перпендикулярна к оси зеркала. Получится отраженная плоская волна, бегущая параллельно оси параболического зеркала. Она возникает в результате интерференции отраженных волн различной поляризации. Но ввиду цилиндрической симметрии результирующая волна будет поляризована по кругу. Однако нельзя заранее утверждать, что при отражении от зеркала общий момент количества движения излучения не изменится.

Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся идеализированной моделью излучателя, аналогичной той, которая применялась в т. III, § 83, для получения плоских электромагнитных волн. Там было показано, что бесконечная заряженная плоскость, приведенная в ускоренное движение, является источником двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся от нее в разные стороны с одной и той же энергией. Чтобы исключить статическое электрическое поле зарядов, мы помещали ранее рядом с рассматриваемой плоскостью вторую неподвижную бесконечную плоскость, заряженную электричеством противоположного знака. Теперь изменим слегка эту модель и возьмем снова бесконечную плоскость, но уже неподвижную и находящуюся в вакууме. Разместим на ней равномерно и достаточно густо электрические диполи с электрическими моментами, параллельными этой плоскости. Пусть каждый диполь вращается в этой плоскости вокруг своего центра с одной и той же угловой скоростью ω и одинаковой начальной фазой. Такая плоскость, покрытая вращающимися диполями, возбудит опять две плоские волны, распространяющиеся в раз-

ные стороны, но уже поляризованные по кругу. В силу симметрии энергия и момент количества движения распределятся поровну между обеими волнами. Поэтому для каждой из этих двух волн в отдельности соотношение (37.2) сохранится.

3. Направление вращения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, понятно, должно совпадать с направлением вращения диполя $\boldsymbol{p}$, т. е. в обеих волнах будет одно и то же. На рис. 65 направление вращения диполей $\boldsymbol{p}$ в плоскости указано стрелкой. В соответствии с указанным направлением моменты количества движения $\boldsymbol{L}_{изл}$ обеих волн направлены слева направо. Обе волны будут бегущими и уходящими, так что в обеих из них вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$ направлен наружу. Значит, в волне, уходящей направо, вектор $\boldsymbol{S}$ направлен тоже направо, т. е. одинаково с вектором $\boldsymbol{L}_{изл}$. В волне же, уходящей налево, вектор $\boldsymbol{S}$ направлен налево, т. е. противоположно вектору $\boldsymbol{L}_{изл}$. Но волна, идущая вправо, поляризована по левому кругу (вращение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ совершается против часовой стрелки, если волна идет к глазу наблюдателя); волна же, идущая влево, поляризована по правому кругу (вращение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ совершается по часовой стрелке, если волна идет также к глазу наблюдателя). Таким образом, в левополяризованной волне вектор $\boldsymbol{L}_{изл}$ направлен в сторону распространения волны, а в правополяризованной — в сторону, противоположную направлению распространения волны. То же заключение, разумеется, справедливо и для волн, поляризованных эллиптически.

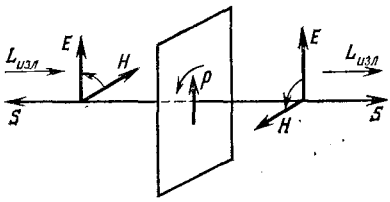

Рис. 65

Нелишне особо подчеркнуть, что взаимное расположение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в бегущей волне однозначно определяет направление вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S}$, а с ним и направление распространения волны. Но этим расположением еще не определяется вид поляризации волны, поляризованной по кругу или эллиптически: поляризация может быть и левой, и правой. Например, на рис. 66, *а* и 66, *б* векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{S}$ имеют одну и ту же ориентацию и обе волны распространяются в одну и ту же сторону, хотя направления вращения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, отмеченные круговыми стрелками, в них противоположны: рис. 66, *а* соответствует левой, а рис. 66, *б* — правой круговой поляризации.

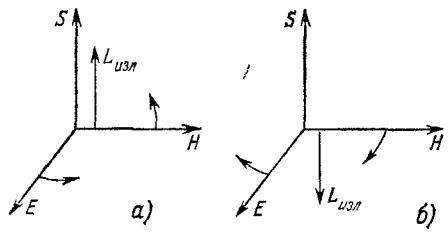

Рис. 66

Укажем теперь, насколько густо надо расположить диполи в излучающей плоскости, чтобы получились только плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно к этой плоскости. Для этого надо учесть, что волны, излучаемые отдельными диполями, конечно, интерферируют между собой. Требуется, чтобы при интерференции они взаимно гасили друг друга во всех направлениях, за исключением направлений, перпендикулярных к излучающей плоскости. Для этого достаточно, чтобы *расстояние между диполями было меньше длины волны* λ. Тогда вдали от плоскости возникнут только плоские уходящие волны. Лишь вблизи самой плоскости на них наложатся *неоднородные волны*, не играющие роли в рассматриваемом нами вопросе, так как эти волны быстро затухают в тонком приграничном слое, толщина которого порядка расстояния между диполями.

В итоге получается, что *всякая плоская электромагнитная волна частоты* ω, *поляризованная по кругу, несет момент количества движения, связанный с энергией волны соотношением* (37.2). *Если поляризация левая, то вектор* $\boldsymbol{L}_{\text{изл}}$ *направлен в сторону распространения волны, если правая, то эти направления противоположны.* Это и есть основной результат, полученный А. И. Садовским.

Случай эллиптической поляризации сводится к случаю круговой поляризации. Действительно, волну, поляризованную по эллипсу, можно разложить на две волны, поляризованные по кругу: одну — по правому, другую — по левому.

4. Момент количества движения излучения можно найти и более непосредственно, исходя из свойств *только самого излучения.* Последнее, как известно, обладает количеством движения, объемная плотность которого дается выражением $\boldsymbol{g}_{\text{эл}} = \boldsymbol{S}/\omega$, где $\boldsymbol{S}$ — вектор Пойнтинга (см. т. III, § 81). Если взять момент вектора $\boldsymbol{g}_{\text{эл}}$ и проинтегрировать по всему пространству, занятому излучением, то и получится момент количества движения излучения. Это делается в задаче в конце этого параграфа, где указанная процедура проводится применительно к излучению электрического диполя Герца, дипольный момент которого, не меняясь по величине, равномерно вращается в одной плоскости. При этом, конечно, речь идет о моменте количества движения всего излучения, испускаемого источником в различных направлениях. Но в качестве источника излучения можно снова взять бесконечную плоскость с распределенными на ней достаточно густо диполями Герца, как это делалось в пункте 2. Таким путем можно получить уже плоскую волну с круговой поляризацией. Для нее можно ввести и понятие вектора плотности потока момента количества движения излучения $\boldsymbol{M}$. На основании формулы (37.2) этот вектор определяется формулой

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}/\omega. \tag{37.3}$$

5. При поглощении световой волны, поляризованной по кругу, на единицу площади тела будет действовать вращающий момент $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}/\omega$, если только волна падает на поверхность тела нормально. Чтобы составить представление о величине эффекта, предположим, что плотность потока энергии в поляризованной по кругу плоской световой волне равна $S = 1$ Вт/см^2 $= 10^7$ эрг/(см^2·с). (Это примерно в 7 раз больше плотности потока солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы.) Тогда для видимого излучения $\lambda = 500$ нм формула (37.3) дает

$$M = S/\omega = \lambda S/2\pi c = 2{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ дин/см},$$

а для волны $\lambda = 1$ см той же интенсивности

$$M = 5{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ дин/см}$$

Если волна проходит через кристаллическую пластинку в полволны, вырезанную параллельно оптической оси, то она превращается из право- в левополяризованную и наоборот. В соответствии с этим величина M удваивается. При заданной мощности излучения эффект возрастает с увеличением длины волны. Но он все же очень мал и экспериментально был обнаружен только в 1935 г. американским физиком Бетом, и притом не только для радиоволн, но и для видимого света.

6. Перейдем теперь к рассмотрению эффекта Садовского с *квантовой точки зрения.* Одна из особенностей здесь состоит в том, что испускание и последующее распространение света происходят не непрерывными порциями, а *неделимыми квантами — фотонами.* В соответствии с этим отпадает необходимость в искусственной концентрации излучения в определенном направлении, какая применялась при классическом рассмотрении. Многофотонные процессы, когда в одном акте излучения испускается не один, а несколько фотонов, как процессы маловероятные, рассматриваться не будут. Другая особенность заключается в том, что *у квантового вектора момента количества движения не могут одновременно иметь определенные значения все три проекции его на координатные оси.*

При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается *один фотон* с энергией $\mathscr{E} = \hbar\omega$. Проекция момента количества движения атома на избранное направление (ось Z) при орбитальном движении электрона может принимать значения $m\hbar$. Пусть при излучении фотона эта проекция изменилась на $\hbar$. В таком случае в акте излучения атом потерял энергию $\hbar\omega$ и проекцию момента количества движения $\hbar$. В соответствии с законами сохранения энергия и момент количества движения, потерянные атомом, *перейдут к излучению.* Поэтому следует заключить, что проекция момента количества движения излученного фотона равна $\hbar$. Внутренний момент количества

движения фотона, т. е. момент, не связанный с его орбитальным движением, называется *спином фотона*. Говорят, что спин фотона целочисленный и равен единице (т. е. на самом деле $\hbar$), хотя значение $\hbar$ относится *не к полному моменту*, а только *к его проекции на избранное направление*. Если проекция (в единицах $\hbar$) равна s, то, как для всякого квантового момента количества движения, квадрат вектора спина фотона определяется выражением $s(s+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$. Отношение величин $\mathscr{E} = \hbar\omega$ и $L_z = \hbar$ дается формулой

$$\mathscr{E}/L_z = \hbar\omega/\hbar = \omega. \tag{37.4}$$

Это соотношение по форме совпадает с классическим (37.2), хотя между ними и есть существенное различие. В классической формуле (37.2) L означает *полный момент* количества движения излучения, тогда как в квантовой формуле (37.4) $L_z = \hbar$ дает только *проекцию момента* на избранное направление.

7. Масса покоя фотона равна нулю. Поэтому не существует системы отсчета, относительно которой фотон находился бы в покое. Его внутренний момент количества движения, или спин, поэтому нельзя определять как момент частицы, находящейся в состоянии покоя. *Фотон может существовать только в движении и притом со скоростью света с в любой системе отсчета.*

Строгое решение вопроса о моменте количества движения фотона может быть дано только в *релятивистской квантовой теории*. Нерелятивистская теория фотона принципиально невозможна, поскольку скорость фотона всегда равна скорости света c. В нашем курсе излагать релятивистскую теорию не представляется возможным. Ограничимся только замечанием, что, как и всякая квантовомеханическая величина, момент количества движения фотона определяется через соответствующий *оператор*. Оказывается, что оператор момента количества движения фотона состоит из двух слагаемых. Одно слагаемое имеет вид $[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}}]$, где $\hat{\boldsymbol{p}}$ — *оператор импульса фотона*. Оно называется *орбитальным*. Дополнительное слагаемое называется *спиновым* или *оператором спина фотона*. Собственное значение проекции оператора $[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}}]$ на избранное направление называется *орбитальным моментом количества движения фотона*. Собственное значение проекции оператора спина на то же направление есть *спиновый момент количества движения или просто спин фотона*.

Будем предполагать, что орбитального момента у фотона нет, так что весь его момент является спиновым. Наглядным оправданием этого может служить замечание, что обычно длина волны, излучаемой атомом, очень велика по сравнению с размерами последнего. Фотон же не может быть локализован в области пространства, линейные размеры которой меньше длины световой волны λ. С другой стороны, размеры излучающего атома очень малы по сравнению с λ. Поэтому фотон излучается

атомом практически всегда «центрально». Фотон при этом не получает никакого орбитального момента количества движения, он уносит *только спиновый момент*. Чтобы у фотона появился дополнительный орбитальный момент, излучение должно произойти с далекой периферии атома — с расстояний порядка λ. Волновая функция атома на таких расстояниях, а с ней и вероятность излучения фотона ничтожны.

8. То обстоятельство, что фотон существует только в состоянии движения со скоростью c, проявляется еще в том, что в любой системе отсчета для него есть *только одно избранное направление — направление движения*. На это направление и проектируется вектор спина фотона. А так как спин фотона $s = 1$, то казалось бы, что относительно этого направления спин может ориентироваться $2s + 1 = 3$ способами: в первом проекция спина направлена по движению, во втором против движения, в третьем равна нулю. В действительности третья возможность не осуществляется.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что к этому заключению приводит опыт. Из поперечности электромагнитных волн следует, что для получения любой поляризации волны достаточно наложения только двух, а не трех волн с различными поляризациями. В согласии с принципом соответствия следует ожидать, что в квантовой теории для получения любого состояния фотона достаточно суперпозиции только двух независимых состояний его. Какие же состояния фотона могут быть приняты в качестве независимых? Для этого рассмотрим связь между поляризацией и спином фотона.

9. Понятие *поляризации* (как и всякое другое понятие) в фотонной теории лишено того ясного наглядного смысла, которым оно отличается в классической теории. Поскольку, однако, поляризация света существует и проявляется на опыте, необходимо установить, что соответствует ей в фотонной теории. *Единственной направленной величиной, характеризующей внутренние свойства фотона, является спин.* С другой стороны, в классической теории момент количества движения $\boldsymbol{L}$ волны, поляризованной по кругу, направлен по или против распространения волны. *Поэтому естественно считать фотон поляризованным по кругу, если он находится в состоянии с определенным значением проекции спина на направление распространения.* Если спин направлен в сторону распространения света, то поляризация фотона называется *левой*; в противном случае ее называют *правой*[1]).

---

[1]) Такое определение правой и левой поляризаций соответствует тому, что принято в классической оптике. В квантовой электродинамике применяется противоположное соглашение: правой поляризации соответствует спин, направленный в сторону распространения фотона, левой — спин, направленный противоположно.

В классической оптике любая поляризация (линейная или эллиптическая) бегущей плоской волны может быть получена путем суперпозиции двух (когерентных) поляризованных по кругу плоских волн, распространяющихся в том же направлении, поляризация одной из которых правая, а другой левая. Так и состояние фотона с круговой поляризацией, распространяющегося в определенном направлении, следует рассматривать как его собственное состояние, которому соответствуют собственные значения проекции спина $s_z = +1, 0, -1$. Путем линейной суперпозиции таких состояний может быть получен фотон любой поляризации. Но состояние с $s_z = 0$ не осуществляется. Поэтому *состояние фотона с любой поляризацией, распространяющегося в определенном направлении, может быть получено линейной суперпозицией только двух состояний*: состояния с $s_z = +1$ и состояния с $s_z = -1$.

Суперпозиция таких состояний, конечно, *не будет классической*. Она понимается в том же смысле, как и суперпозиция квантовомеханических состояний частицы, характеризуемых волновыми функциями. А так как состояния фотона с $s_z = +1$ и с $s_z = -1$ являются собственными, то квадраты модулей коэффициентов при этих состояниях в суперпозиции определяют относительные вероятности самих состояний. Это проявляется, например, в том, что при измерении проекции s_z (скажем, по величине вращающего момента, сообщаемого телу при поглощении фотона) может с соответствующей вероятностью получиться либо $s_z = +1$, либо $s_z = -1$. Никакой промежуточный результат получиться не может.

ЗАДАЧА

Твердый диполь с электрическим моментом $\boldsymbol{p}$ равномерно вращается вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, причем вектор $\boldsymbol{p}$ все время расположен в одной плоскости. Согласно классической электродинамике он излучает, как диполь Герца. Излучение обладает количеством движения, объемная плотность которого определяется выражением

$$\boldsymbol{g}_{\text{эл}} = (1/4\pi c)\,[\boldsymbol{EH}] \tag{37.5}$$

(см. т. III, § 84). Излучение уносит и момент количества движения. Для вычисления полного момента, уносимого излучением, достаточно знать $\boldsymbol{g}_{\text{эл}}$ на бесконечно удаленной сфере с центром в месте нахождения диполя. Откуда может взяться такой момент, если вдали от диполя (в волновой зоне) поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны между собой, как в плоской волне, и оба перпендикулярны к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$, проведенному от диполя к точке наблюдения, так что вектор $\boldsymbol{g}_{\text{эл}}$ направлен вдоль $\boldsymbol{r}$, а потому момент $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{g}_{\text{эл}}]$ равен нулю?

Решение. Утверждение, что в волновой зоне поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ убывают с расстоянием как $1/r$, — приближенное и выполняется только асимптотически при $r \to \infty$. Такое приближение достаточно для вычисления полной энергии или полного импульса, уносимых излучением, так как тогда вектор $[\boldsymbol{EH}]$ будет меняться как $1/r^2$. Высшие степени величины $1/r$ учитывать не надо, поскольку при интегрировании по сфере они ничего не внесут, если выполнить предельный переход $r \to \infty$. Но плотность момента количества движения $\boldsymbol{l}_{\text{эл}} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{g}_{\text{эл}}]$ получается из $\boldsymbol{g}_{\text{эл}}$ векторным умножением на $\boldsymbol{r}$. Величину

$\boldsymbol{g}_{эл}$ на удаленной сфере, понятно, достаточно вычислить также с точностью до членов $1/r^2$ включительно, а для этого надо учесть в выражении для $\boldsymbol{g}_{эл}$ и члены третьей степени по $(1/r)$. Чтобы это сделать, достаточно пользоваться следующими формулами для поля излучения диполя Герца в волновой зоне в вакууме:

$$\boldsymbol{E} = \left[\frac{3(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})}{cr^4}\boldsymbol{r} - \frac{\dot{\boldsymbol{p}}}{cr^2}\right]_{t-r/c} - \left[\frac{(\ddot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})}{c^2r^3}\boldsymbol{r} - \frac{\ddot{\boldsymbol{p}}}{c^2r}\right]_{t-r/c},$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{cr^3}[\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r}]_{t-r/c} + \frac{1}{c^2r^2}[\ddot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r}]_{t-r/c}. \tag{37.6}$$

Они получаются из формул (141.10) тома III, если их написать для вакуума и в соответствии с этим положить $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, $v = c$. При этом в первой формуле (141.10) отброшен первый член, пропорциональный $1/r^3$, так как на $\boldsymbol{g}_{эл}$ он может повлиять только в члене порядка $1/r^4$. Из формул (37.6) надо найти $[\boldsymbol{EH}]$ в нужном нам приближении, опуская при этом члены, коллинеарные с $\boldsymbol{r}$, поскольку они не играют роли при вычислении $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{g}_{эл}]$. Таким путем, опуская значок $t - r/c$, получаем

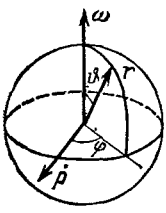

Рис. 67

$$\boldsymbol{g}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})\ddot{\boldsymbol{p}} + (\ldots)\boldsymbol{r}, \tag{37.7}$$

$$\boldsymbol{l}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})[\boldsymbol{r}\ddot{\boldsymbol{p}}]. \tag{37.8}$$

Преобразуем эту формулу, воспользовавшись тем, что вектор $\boldsymbol{p}$ не меняет своей длины, а изменяется только из-за вращения. В таком случае $\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{p}]$. То же относится и к $\dot{\boldsymbol{p}}$, т. е. $\ddot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{p}}]$. В результате формула (37.8) преобразуется:

$$\boldsymbol{l}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{p}}]] = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})\{(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{p}}\}. \tag{37.9}$$

Чтобы найти полный момент излучения, испускаемого диполем в единицу времени, надо это выражение умножить на c и результат проинтегрировать по всей поверхности бесконечно удаленной сферы. Ясно, что из-за симметрии вращения вокруг $\boldsymbol{\omega}$ при таком интегрировании получится вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{\omega}$. А так как вектор $\dot{\boldsymbol{p}} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{p}]$ перпендикулярен к $\boldsymbol{\omega}$, то последний член в (37.9) можно опустить. Тогда

$$\boldsymbol{l}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})^2\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\pi c^4 r^2}\dot{\boldsymbol{p}}^2\cos^2\varphi\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{37.10}$$

При интегрировании можно поступать так, как если бы вектор $\dot{\boldsymbol{p}}$ оставался неподвижным, и выбрать сферическую систему координат, указанную на рис. 67. В этом случае элемент поверхности сферы будет $dS = r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$. В результате для момента импульса излучения получим

$$\boldsymbol{L}_{изл} = \frac{\omega\dot{\boldsymbol{p}}^2}{2\pi c^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{p}}^2\boldsymbol{\omega}. \tag{37.11}$$

Энергия, излучаемая диполем в единицу времени, равна $\mathscr{E}_{изл} = (2/3c^3)\ddot{\boldsymbol{p}}^2$ (см. т. III, § 141). А так как $\ddot{\boldsymbol{p}}^2 = \omega^2\dot{\boldsymbol{p}}^2$, то получается

$$L_{изл} = \mathscr{E}_{изл}/\omega. \tag{37.12}$$