

тогда как опыт дает  $\mu_a = 0.86$ . Это расхождение далеко выходит за пределы погрешностей. Неаддитивность магнитных моментов находит свое истолкование в нецентральности сил, действующих между нуклонами.

### § 69. Четность. Закон сохранения четности

1. Понятие *четности* возникает в связи с операцией *инверсии*. При инверсии относительно начала координат знаки декартовых координат всех частиц системы меняются на противоположные, т. е.  $x, y, z$  переходят в  $-x, -y, -z$  или  $r$  заменяется на  $-r$ . В дальнейшем для сокращения записи под  $r$  обычно будет пониматься радиус-вектор не одной частицы, а совокупность радиус-векторов частиц всей системы. Если же в рассуждении требуется явно указать, что частиц несколько, то мы (также для сокращения записи) ограничимся случаем двух частиц, нумеруя их индексами 1 и 2. Это не вводит никаких ограничений. Оператор инверсии обозначается через  $\hat{P}$ . Таким образом, по определению  $\hat{P}\psi(r) = \psi(-r)$ . Операцию инверсии  $r \rightarrow -r$  можно представить как зеркальное отражение относительно плоскости, проходящей через начало координат, с последующим поворотом на  $180^\circ$  вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости.

Найдем прежде всего собственные значения  $P$  оператора  $\hat{P}$ . Они определяются уравнением

$$\hat{P}\psi(r) = P\psi(r).$$

Повторное применение оператора  $\hat{P}$  дает

$$\hat{P}^2\psi(r) = \hat{P}\hat{P}\psi(r) = P^2\psi(r).$$

Но оператор  $\hat{P}^2$  есть тождественное преобразование, при котором ничего не меняется. Значит,  $\psi(r) = P^2\psi(r)$ , а потому  $P^2 = 1$ ,  $P = \pm 1$ . Таким образом, собственные значения оператора  $\hat{P}$  будут  $+1$  и  $-1$ . В соответствии с этим собственные функции оператора  $\hat{P}$  разделяются на *четные* и *нечетные*. Четная функция определяется соотношением  $\psi(r) = \psi(-r)$ , а нечетная — соотношением  $\psi(r) = -\psi(-r)$ . Число  $P$  принято называть *четностью* функции  $\psi(r)$  или состояния системы. Для четных функций  $P = +1$ , для нечетных  $P = -1$ .

2. В уравнении Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi \quad (69.1)$$

гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}$  определяется выражением

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (69.2)$$

Первые два слагаемых представляют оператор кинетической энергии и не меняются при инверсии, если начало координат поместить в центре масс системы, что и будет делаться в дальнейшем. В этом случае оператор кинетической энергии не меняется при инверсии относительно начала координат, поскольку дифференциалы координат в него входят во второй степени. До 1956 г. считали, что оператор потенциальной энергии  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  при инверсии также никогда не меняется. Действительно, при инверсии не изменяется относительное расположение любой пары частиц системы. Меняется на прямо противоположное только направление соединяющей их прямой. А от этого, как думали, потенциальная функция системы  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  не претерпевает никаких изменений. После открытия в 1956 г. несохранения четности в слабых взаимодействиях было установлено, что это заключение справедливо для электромагнитных и сильных взаимодействий и нарушается для слабых. Таким образом, при сильных и электромагнитных взаимодействиях гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}$  не меняется при инверсии. В этом случае имеет место закон сохранения четности волновой функции. Это приближенный закон, справедливый с точностью до слабых взаимодействий.

Закон сохранения четности является следствием уравнения Шредингера (69.1). Действительно, допустим, что в момент времени  $t = 0$  волновая функция  $\Psi = \Psi_0(\mathbf{r})$  либо четная, либо нечетная. Для приращения  $d\Psi$  за время  $dt$  уравнение (69.1) дает

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt = \frac{dt}{i\hbar} \widehat{\mathcal{H}} \Psi(r),$$

или с точностью до членов более высокого порядка малости

$$d\Psi = \frac{dt}{i\hbar} \widehat{\mathcal{H}} \Psi_0(r).$$

По гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}$  не меняется при инверсии координат. Значит, функция  $\widehat{\mathcal{H}}\Psi_0(r)$ , а с ней и функция  $\Psi_{at}(r) = \Psi_0(r) + d\Psi$  обладают той же четностью, что и начальная функция  $\Psi_0(r)$ . Применяя этот процесс дальше, докажем, что это справедливо и для функции  $\Psi_t(r)$  при любом конечном значении времени  $t$ .

Доказательство предполагало, что волновая функция  $\Psi(r)$  либо четная, либо нечетная. Определенной четностью волновая функция обладает только для невырожденного состояния системы (например, для основного состояния ядра), описываемого

единственной собственной волновой функцией (разумеется, определенной с точностью до несущественного фазового множителя  $e^{i\theta}$ ). Во всяком вырожденном состоянии волновая функция в общем случае может быть представлена линейной суперпозицией двух функций, из которых одна четная, а другая нечетная. В таком случае закон сохранения четности означает сохранение относительной доли обоих состояний с определенной четностью. Доказательство, приведенное выше, без всяких затруднений обобщается и на этот случай.

Заметим, что это доказательство основано на уравнении (69.2), а оно не учитывает возможности рождения частиц. Более общее рассмотрение показывает, что с точностью до слабых взаимодействий четность волновой функции системы не меняется при любых процессах (включая рождение и поглощение частиц).

3. Из приведенного нами доказательства видно, что закон сохранения четности есть свойство гамильтонiana  $\mathcal{H}$ , т. е. свойство самой системы, а не функции  $\Psi$ , характеризующей ее состояние. Поэтому-то из закона сохранения четности, как из всякого закона, можно вывести определенные физические следствия, доступные экспериментальной проверке. В качестве примера в конце этого параграфа мы приводим вывод правила отбора при излучении по орбитальному квантовому числу  $l$ .

4. Важное значение имеет задача определения четности волновой функции системы, состоящей из нескольких составных частей. Допустим для простоты, что система состоит из двух частей  $A$  и  $B$ . Если можно пренебречь взаимодействием между ними, то волновая функция сложной системы может быть представлена в виде

$$\Psi_{A+B} = \Psi_A \Psi_B \Psi_{l_A} \Psi_{l_B}, \quad (69.3)$$

где  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$  — волновые функции, описывающие внутренние движения подсистем относительно их центров масс, а  $\Psi_{l_A}$  и  $\Psi_{l_B}$  — движения тех же центров масс относительно центра масс всей сложной системы. Исследование на четность полной волновой функции  $\Psi_{A+B}$  сводится к последовательному повторению того же исследования для каждой из четырех функций  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$ ,  $\Psi_{l_A}$ ,  $\Psi_{l_B}$  в отдельности. Поэтому для четности всей системы можно написать

$$P_{A+B} = P_A P_B P_{l_A} P_{l_B}. \quad (69.4)$$

Чтобы определить четность сложной системы по четностям составляющих ее подсистем, надо знать явный вид волновых функций  $\Psi_{l_A}$  и  $\Psi_{l_B}$  для относительного движения центров этих подсистем. Эта задача сводится к нахождению волновой функ-

ции частицы при ее движении относительно неподвижного центра. Она решается в квантовой механике. Мы не предполагаем ее решать, а лишь заимствуем необходимые результаты из квантовой механики. В сферической системе координат положение частицы относительно неподвижного центра задается расстоянием до него  $r$ , полярным углом  $\vartheta$  и азимутальным углом  $\phi$ . Волновая функция частицы в такой системе имеет вид

$$\Psi_l = R(r) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi},$$

где  $l$  и  $m$  — квантовые числа орбитального момента и его проекции на полярную ось, а  $P_l^m(\cos \vartheta)$  — так называемые *присоединенные полиномы Лежандра* (1752 — 1833).

Явный вид функции  $R(r)$ , а также присоединенных полиномов Лежандра в рассматриваемой нами задаче не требуется. Достаточно указать, что при замене  $\cos \vartheta$  на  $-\cos \vartheta$  полином  $P_l^m(\cos \vartheta)$  приобретает множитель  $(-1)^{l-m}$ . При инверсии значение радиуса  $r$  не меняется, а углы  $\vartheta$  и  $\phi$  заменяются соответственно на  $\pi - \vartheta$  и  $\phi + \pi$ , так что

$$\cos \vartheta \rightarrow \cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta, \quad e^{im\phi} \rightarrow e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m e^{im\phi}.$$

Поэтому

$$\Psi_l \rightarrow R(r) (-1)^{l-m} P_l^m(\cos \vartheta) \cdot (-1)^m e^{im\phi} = (-1)^l \Psi_{-l}.$$

Таким образом, четность волновой функции относительного движения равна  $P_l = (-1)^l$ , а четность системы  $A + B$

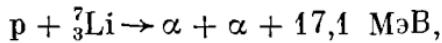
$$P_{A+B} = (-1)^{l_A} (-1)^{l_B} P_A P_B, \quad (69.5)$$

если моменты имеют определенные значения. Эта формула trivialно обобщается на случай сложной системы, состоящей из произвольного числа частей.

5. Части  $A$  и  $B$ , из которых состоит система, могут быть и элементарными частицами с отличной от нуля массой покоя. Как показывает опыт, каждая элементарная частица с точностью до слабых взаимодействий характеризуется определенной четностью, не связанной с ее движением как целого. Такая четность называется *внутренней четностью* частицы. Внутренняя четность — такое же неотъемлемое свойство частицы, как и ее спин. Частицы, у которых внутренняя четность равна  $+1$ , называются *четными*, а частицы с внутренней четностью  $-1$  — *нечетными*. Правило (69.5), если пренебречь эффектами слабых взаимодействий, распространяется и на системы, состоящие из элементарных частиц (с отличными от нуля массами покоя), но с учетом их внутренних четностей. Внутренние четности протона, нейтрона и электрона могут быть заданы произвольно. Это соглашение и применяется в дальнейшем. Обычно они принимаются равными  $+1$ . После этого внутренние четности атома,

ядра и большинства элементарных частиц однозначно определяются из экспериментальных данных на основе закона сохранения четности.

Атомное ядро является сложной системой, состоящей из движущихся внутри него нуклонов. Если взаимодействием между ними можно пренебречь, то четность ядра будет  $(-1)^{\sum l_i}$ , где  $l_i$  — орбитальное квантовое число, определяющее характер движения  $i$ -го нуклона. Состояние нуклона в ядре будет четным, если его орбитальное квантовое число  $l$  четное, и нечетным в противоположном случае. Так, протоны и нейтроны в  $s$ -состоянии являются четными нуклонами, а в  $p$ -состоянии — нечетными. В качестве примера определим четность ядра  ${}^7\text{Li}$ . В модели ядерных оболочек (см. гл. X) оказывается, что это ядро в основном состоянии состоит из четырех  $s$ -нуклонов и трех  $p$ -нуклонов. Поэтому четность такого ядра равна  $(-1)^3 = -1$ . Напротив,  $\alpha$ -частица состоит из четырех пуклонов в  $s$ -состоянии — ее внутренняя четность равна +1. Опыт показывает, что при энергиях падающего протона, меньших примерно 0,5 МэВ, ядерная реакция



несмотря на ее высокую экзотермичность, подавлена (т. е. идет с малой вероятностью). Дело в том, что четность двух  $\alpha$ -частиц равна +1. Такова же четность протона при указанных энергиях. Четность же ядра  ${}^7\text{Li}$  равна  $-1$ , так что в рассматриваемой реакции закон сохранения четности нарушается.

Основное состояние четно-четных ядер имеет положительную четность. Основные состояния других ядер могут быть как четными, так и нечетными. Ядра в возбужденных состояниях могут иметь различную четность, не обязательно совпадающую с четностью основного состояния. На схемах ядерных уровней обычно указываются спин и четность каждого уровня. Спин обозначается числом, а четность — знаком «+» или «-». Например, символ  $2^+$  означает четный уровень со спином 2, а символ  $(1/2)^-$  — нечетный уровень со спином  $1/2$ . Совокупность значений спина и четности называется *характером уровня ядра*.

6. Все изложенное относится к частицам с непулевой массой покоя. Для фотонов, как и для всяких релятивистских частиц с нулевой массой покоя, понятия состояния с определенным значением орбитального момента  $l$  не существует. Вместо этого引进ится аналог этого понятия, называемый *мультиполем*. Мультиполь электромагнитного поля — это состояние свободно распространяющегося поля, обладающего определенным полным моментом  $L$  и определенной четностью  $P$ . Для свободного фотона возможны состояния с полным моментом  $L = 1, 2, 3, \dots$ . Частный случай  $L = 1$  уже был подробно рассмотрен в § 37.

Состояния с нулевым полным моментом  $L$  для фотона не существует. Состояние фотона с моментом  $L$  и четностью  $(-1)^L$  называется *электрическим  $2^L$ -полем*, а состояние с таким же моментом и четностью  $(-1)^{L+1}$  — *магнитным  $2^L$ -полем*. Состояние с  $L = 1$  называется *дипольным*, с  $L = 2$  — *квадрупольным*, с  $L = 3$  — *октупольным* и т. д. В соответствии с этим электрический диполь и магнитный квадруполь нечетны, а магнитный диполь и электрический квадруполь — четны. Для обозначения кванта электрического мультиполя ставится буква  $E$ , которой приписывается значение полного момента  $L$ . В случае кванта магнитного мультиполя буква  $E$  заменяется на  $M$ . Например, электрический дипольный квант обозначается через  $E1$ , магнитный дипольный квант — через  $M1$ , электрический квадрупольный — через  $E2$  и т. д.

Мультипольная терминология основана на классическом понятии мультиполя (см. следующий параграф). Так, при колебаниях электрического дипольного момента возникает электромагнитное излучение, которое с квантовой точки зрения состоит из  $E1$  фотонов.

Если приведенная длина фотона  $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/2\pi$  много больше размеров  $R$  физической системы, с которой он взаимодействует ( $R \ll \tilde{\lambda}$ ), то в этом взаимодействии участвуют преимущественно мультиполи наименьшего порядка, допускаемые законами сохранения момента и четности. При прочих равных условиях отношение вероятности испускания (или поглощения) электрического квантового мультиполя  $2^L$  к соответствующей вероятности испускания (или поглощения) кванта  $E1$  порядка  $(R/\tilde{\lambda})^{2(L-1)}$ . В случае испускания (поглощения) магнитного кванта той же мультипольности  $2^L$  то же отношение — порядка  $(R/\tilde{\lambda})^{2L}$ , т. е. в  $(\tilde{\lambda}/R)^2$  раз меньше. Поэтому, например, вероятности испускания квантов  $E2$  и  $M1$  обычно близки между собой. Это связано с тем, что по порядку величины отношение  $(R/\tilde{\lambda})^2$  равно  $(v/c)^2$ , где  $v$  — скорость заряженной частицы в системе (например, протона в ядре), а отношение напряженностей электрического и магнитного полей, генерируемых движущимся зарядом, — порядка  $v/c$ .

Изложенное в этом пункте в равной степени применимо к мультиполям молекул, атомов, ядер и элементарных частиц. В качестве примера рассмотрим правило отбора (40.1). Оно относится к испусканию (или поглощению) при наличии в атоме одного внешнего (валентного) электрона. Испускаемый электрический дипольный фотон, как мы видели, — нечетный. Четность атома в результате испускания такого фотона меняется на множитель  $(-1)^{\Delta l}$ , а всей системы «атом — испущенный фотон» — на множитель  $(-1)^{\Delta l \pm 1}$ . Закон сохранения четности при дипольном излучении допускает только значения  $\Delta l = \pm 1$ . Значение  $\Delta l = 0$  (хотя и допускаемое законом сохранения момента) запре-

щено законом сохранения четности. Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что этот запрет относится к *электрическому дипольному испусканию*. Испускание электрических квадрупольных и магнитных дипольных квантов возможно и приводит к появлению в спектре так называемых запрещенных линий. Но вероятность электрического квадрупольного и магнитного дипольного испускания примерно в  $(\lambda/R)^2$  меньше, чем вероятность электрического дипольного испускания. Она проявляется существенно только тогда, когда последнее излучение по каким-либо причинам запрещено.

За счет слабых взаимодействий волновая функция системы всегда содержит малую примесь состояния с противоположной четностью. Поэтому если, например, разрешен по четности и моменту  $M1$ -переход, то он будет сопровождаться слабым  $E1$ -переходом. Интерференция  $M1 + E1$  приводит к циркулярной поляризации квантов или к асимметрии их вылета по спину и против спина.

## § 70. Электрические свойства и форма ядра

1. Величины, характеризующие электрические свойства ядра, могут быть введены совершенно так же, как это делается в электростатике для системы точечных зарядов, занимающих небольшую область пространства. Поэтому нуклоны в ядре будем считать точечными, хотя это вовсе не обязательно. Во внешнем постоянном электрическом поле с потенциалом  $\phi$  потенциальная энергия ядра определяется выражением

$$U = \sum_{\alpha} e\varphi(x_{\alpha}), \quad (70.1)$$

где суммирование производится только по протонам ядра, так как нейтроны, поскольку они не имеют электрического заряда, не вносили бы в эту сумму никакого вклада. Функция  $\varphi(x_{\alpha})$  означает потенциал внешнего поля в точке нахождения протона  $\alpha$ , а  $x$  — совокупность декартовых координат того же протона ( $i = 1, 2, 3; x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ ). Таким образом, в подробной записи

$$U = \sum_{\alpha} e\varphi(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) = \sum_{\alpha} e\varphi(\mathbf{r}_{\alpha}). \quad (70.1a)$$

Поместим начало координат в центре масс всего ядра (т. е. учитывая и нейтроны) и примем во внимание, что на расстояниях порядка линейных размеров ядра внешнее электрическое поле меняется мало. Тогда потенциал  $\varphi(x_{\alpha})$  целесообразно разложить в степенной ряд по координатам:

$$\varphi(x_{\alpha}) = \varphi(0) + x_{\alpha i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_0 + \frac{1}{2} x_{\alpha i} x_{\alpha h} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_h} \right)_0 + \dots,$$