§ 4. Электрический диполь

1. Простейшей системой точечных зарядов является *электрический диполь* (двойной полюс). Так называется совокупность равных по величине, но противоположных по знаку двух точечных зарядов $-q$ и $+q$, сдвинутых друг относительно друга на некоторое расстояние (рис. 6). Пусть $\boldsymbol{l}$ — радиус-вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Вектор $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ называется *электрическим моментом диполя* или *дипольным моментом*. Если длина l пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием от диполя до точки наблюдения, то диполь называется *точечным*. Вычислим электрическое поле точечного диполя. В окончательных формулах, которые мы получим, безразлично (в пределах принятой точности расчета), от какой точки диполя отсчитывается расстояние r до точки наблюдения.

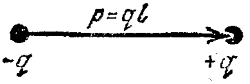

Рис. 6.

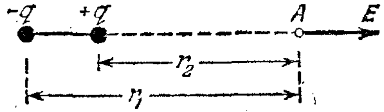

Рис. 7.

Рассмотрим сначала случай, когда точка наблюдения A лежит на продолжении оси диполя (рис. 7). Напряженность электрического поля в этой точке будет

$$E = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \approx q\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)(r_2 - r_1),$$

или

$$E = \frac{2ql}{r^3} = \frac{2p}{r^3}.$$

В векторной форме:

$$\boldsymbol{E} = \frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}. \qquad (4.1)$$

Допустим теперь, что точка наблюдения A лежит на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его центра O (рис. 8). Вектор $\boldsymbol{E}$ получается геометрическим сложением полей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$, возбуждаемых точечными зарядами $-q$ и $+q$. Как видно из рисунка, вектор $\boldsymbol{E}$ антипараллелен $\boldsymbol{p}$, а его длина (для точечного диполя) равна

$$E = E_1\alpha = \frac{q}{r^2}\,\frac{l}{r} = \frac{p}{r^3}.$$

В векторной форме:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}. \qquad (4.2)$$

Не обязательно, чтобы перпендикуляр AO проходил через центр (точечного) диполя. В принятом приближении формула (4.2) остается верной и тогда, когда за O принята любая точка диполя. Ее можно выбрать даже вне диполя. Важно только, чтобы ее расстояние до центра диполя было пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

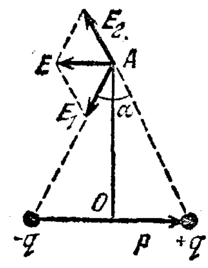

Рис. 8.

Общий случай сводится к разобранным частным случаям. Опустим из заряда $+q$ перпендикуляр CD на линию наблюдения BA (рис. 9). Поместим в точке D два точечных заряда: $+q$ и $-q$. Это не изменит поля. Но полученную систему четырех зарядов можно рассматривать как совокупность двух диполей с дипольными моментами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$, изображенными на рис. 9. Вообще, при вычислении напряженности поля, а также сил, действующих на диполь, последний всегда можно заменить системой любого числа диполей, геометрическая сумма моментов которых равна моменту рассматриваемого диполя. Применяя теперь к диполям $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ формулы (4.1) и (4.2), получим

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{r^3}(2\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2),$$

или, исключая $\boldsymbol{p}_2$ с помощью соотношения $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}$,

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{r^3}(3\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}),$$

или, наконец,

$$\boldsymbol{E}=\frac{3(\boldsymbol{pr})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}. \qquad (4.3)$$

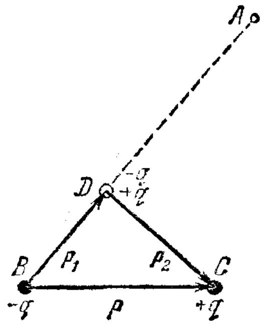

Рис. 9.

2. Рассмотрим теперь силы, действующие на диполь в электрическом поле. Если поле однородно, то результирующая сила $\boldsymbol{F}$ равна нулю, так как силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, действующие на отрицательный и положительный заряды диполя, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 10). Момент этих сил $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{l}\boldsymbol{F}_2]=q[\boldsymbol{l}\boldsymbol{E}]$, или

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}]. \qquad (4.4)$$

Момент $\boldsymbol{M}$ стремится повернуть ось диполя в направлении поля $\boldsymbol{E}$. Существуют два положения равновесия диполя: когда диполь параллелен электрическому полю и когда он антипараллелен ему. Первое положение устойчиво, второе — неустойчиво. Формула (4.4) верна также для точечного диполя в неоднородном поле.

Если поле неоднородно, то сила $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, вообще говоря, не обращается в нуль. В этом случае $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)$, где $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ — напряженности поля в точках нахождения зарядов $-q$ и $+q$. Для точечного диполя разность $\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1$ можно приближенно заменить дифференциалом

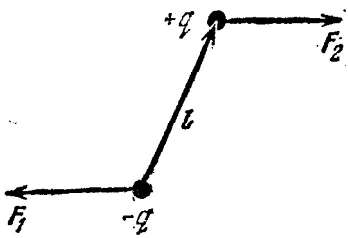

Рис. 10.

$$d\boldsymbol{E} = l_x \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}.$$

В этом приближении

$$\boldsymbol{F} = p_x \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}. \qquad (4.5)$$

В целях сокращения письма введем оператор «набла», или оператор Гамильтона (1805—1865):

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (4.6)$$

Скалярным умножением $\boldsymbol{p}$ на ∇ получаем оператор

$$(\boldsymbol{p}\nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

С помощью этого оператора формула (4.5) записывается так:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\,\boldsymbol{E}. \qquad (4.7)$$

Смысл этой формулы раскрывается при сравнении ее с выражением (4.5). В частности, если ось X направить вдоль вектора $\boldsymbol{p}$ ($p_x = p$, $p_y = p_z = 0$), то

$$\boldsymbol{F} = p\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}. \qquad (4.8)$$

3. Нейтральная система точечных зарядов, занимающая небольшой объем, в первом приближении ведет себя как точечный диполь. Действительно, разделим мысленно заряды системы на более мелкие части, и притом так, чтобы каждому заряду соответствовал равный заряд противоположного знака. Сгруппировав такие заряды попарно, можно рассматривать нашу систему как систему диполей $\boldsymbol{p}_i$. При вычислении поля на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы, такие диполи можно считать точечными. Их можно перенести в одну точку и векторно сложить в один точечный диполь с дипольным моментом $\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{p}_i$. Так же можно поступать при вычислении сил, действующих на систему зарядов во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Необходимо только, чтобы размеры системы были настолько малы, чтобы во всех точках занимаемого ею объема внешнее поле $\boldsymbol{E}$ и его пространственные производные

$\partial E/\partial x$, $\partial E/\partial y$, $\partial E/\partial z$ могли с достаточной точностью считаться одинаковыми.

Найдем общее выражение для дипольного момента нейтральной системы зарядов. Предполагая сначала, что система указанным выше способом разделена на пары равных зарядов противоположного знака, напишем

$$\boldsymbol{p} = \sum q_i^+ \boldsymbol{l}_i = \sum q_i^+ (\boldsymbol{r}_i^+ - \boldsymbol{r}_i^-) = \sum (q_i^+ \boldsymbol{r}_i^+ + q_i^- \boldsymbol{r}_i^-),$$

где q_i^+, $\boldsymbol{r}_i^+$ и q_i^-, $\boldsymbol{r}_i^-$ — величины положительных и отрицательных зарядов и их радиусы-векторы соответственно. Теперь можно снова соединить мысленно разделенные заряды и вернуться к первоначальной системе их. Тогда получится

$$\boldsymbol{p} = \sum q_i \boldsymbol{r}_i, \tag{4.9}$$

где суммирование производится уже по всем зарядам первоначальной системы, как положительным, так и отрицательным.

Для электрически нейтральной системы величина суммы (4.9) не зависит от выбора начала координат. Действительно, при переходе к новой (штрихованной) системе координат с другим началом $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор. Поэтому дипольный момент в новой системе координат будет

$$\boldsymbol{p}' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a} \sum q_i.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль из-за электрической нейтральности системы, а потому $\boldsymbol{p}' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{p}$.

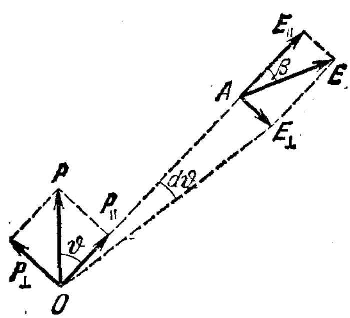

Рис. 11.

ЗАДАЧИ

1. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем $\boldsymbol{p}$, если расстояние между ними равно r и дипольный момент $\boldsymbol{p}$ направлен вдоль соединяющей их прямой.

Ответ. $F = 2qp/r^3$. Диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, и отталкиваться в противном случае.

2. Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$, дипольные моменты которых направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно r.

Ответ. $F = 6p_1p_2/r^4$. Диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае.

3. Найти уравнение силовых линий электрического поля точечного диполя в полярной системе координат.

Решение. Разложим вектор $\boldsymbol{p}$ (рис. 11) на составляющую $\boldsymbol{p}_{||}$ вдоль радиуса $\boldsymbol{r}$ и составляющую $\boldsymbol{p}_\perp$, к нему перпендикулярную. Соответствующие им поля в точке наблюдения A будут

$$E_{\parallel}=2p_{\parallel}/r^3, \qquad E_{\perp}=-p_{\perp}/r^3.$$

Угол β между радиусом r и электрической силовой линией определится формулой

$$\operatorname{tg}\beta=E_{\perp}/E_{\parallel}=p_{\perp}/(2p_{\parallel})=(1/2)\ \operatorname{tg}\vartheta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора $p_{\perp}$ может быть, с одной стороны, представлена как $dr\ \operatorname{tg}\beta=(dr/2)\ \operatorname{tg}\vartheta$, с другой стороны, как $r\ d\vartheta$. Поэтому

$$(dr/2)\ \operatorname{tg}\vartheta=r\ d\vartheta.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомое уравнение электрической силовой линии:

$$r=r_0\sin^2\vartheta.$$

Постоянная r_0 имеет смысл длины радиуса-вектора r в экваториальной плоскости, т. е. при $\vartheta=\pi/2$.

4. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

Ответ. Да, возможны, и притом на любом расстоянии заряда от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиусом-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos\alpha=\mp\sqrt{1/3}$, где минус относится к положительному заряду, а плюс — к отрицательному.

§ 5. Поток вектора и электростатическая теорема Гаусса

1. Понятие *потока вектора* является одним из важнейших понятий векторного анализа. Оно используется при формулировке важнейших свойств электрического, магнитного и других векторных полей. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике. Возьмем в поле скоростей жидкости малую площадку S, перпендикулярную к вектору скорости жидкости $\boldsymbol{v}$ (рис. 12). Объем жидкости,

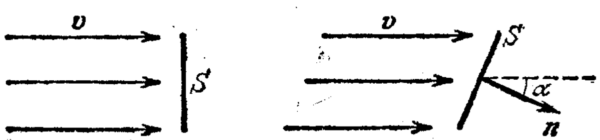

Рис. 12.

протекающей через эту площадку за время dt, равен $vS\,dt$. Если площадка наклонена к потоку, то соответствующий объем будет $vS\cos\alpha\,dt$, где α — угол между вектором скорости $\boldsymbol{v}$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ к площадке S. Объем жидкости, протекающей через площадку S в единицу времени, получится делением этого выражения на dt. Он равен $vS\cos\alpha$, т. е. скалярному произведению $(\boldsymbol{vS})$ вектора скорости $\boldsymbol{v}$ на вектор площадки $\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{n}$. Единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к площадке S можно провести в двух прямо противополож-