поля в точке наблюдения A будут

$$E_{\parallel}=2p_{\parallel}/r^3, \qquad E_{\perp}=-p_{\perp}/r^3.$$

Угол β между радиусом r и электрической силовой линией определится формулой

$$\operatorname{tg}\beta=E_{\perp}/E_{\parallel}=p_{\perp}/(2p_{\parallel})=(1/2)\ \operatorname{tg}\vartheta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора $p_{\perp}$ может быть, с одной стороны, представлена как $dr\ \operatorname{tg}\beta=(dr/2)\ \operatorname{tg}\vartheta$, с другой стороны, как $r\ d\vartheta$. Поэтому

$$(dr/2)\ \operatorname{tg}\vartheta=r\ d\vartheta.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомое уравнение электрической силовой линии:

$$r=r_0\sin^2\vartheta.$$

Постоянная r_0 имеет смысл длины радиуса-вектора r в экваториальной плоскости, т. е. при $\vartheta=\pi/2$.

4. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

Ответ. Да, возможны, и притом на любом расстоянии заряда от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиусом-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos\alpha=\mp\sqrt{1/3}$, где минус относится к положительному заряду, а плюс — к отрицательному.

§ 5. Поток вектора и электростатическая теорема Гаусса

1. Понятие *потока вектора* является одним из важнейших понятий векторного анализа. Оно используется при формулировке важнейших свойств электрического, магнитного и других векторных полей. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике. Возьмем в поле скоростей жидкости малую площадку S, перпендикулярную к вектору скорости жидкости $\boldsymbol{v}$ (рис. 12). Объем жидкости,

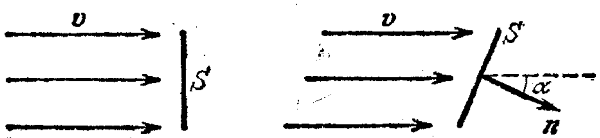

Рис. 12.

протекающей через эту площадку за время dt, равен $vS\ dt$. Если площадка наклонена к потоку, то соответствующий объем будет $vS\cos\alpha\ dt$, где α — угол между вектором скорости $\boldsymbol{v}$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ к площадке S. Объем жидкости, протекающей через площадку S в единицу времени, получится делением этого выражения на dt. Он равен $vS\cos\alpha$, т. е. скалярному произведению $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{S})$ вектора скорости $\boldsymbol{v}$ на вектор площадки $\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{n}$. Единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к площадке S можно провести в двух прямо противоположных направлениях. Одно из них условно принимается за положительное. В этом направлении и проводится нормаль $\boldsymbol{n}$. Та сторона площадки, из которой исходит нормаль $\boldsymbol{n}$, называется *внешней*, а та, в которую нормаль $\boldsymbol{n}$ входит, — *внутренней*. Если поверхность S не бесконечно мала, то при вычислении объема протекающей жидкости ее надо разбить на бесконечно малые площадки dS, а затем вычислить интеграл $\int (\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S})$ по всей поверхности S.

Выражения типа $(\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S})$ или $\int (\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S})$ встречаются в самых разнообразных вопросах физики и математики. Эти выражения имеют смысл независимо от конкретной физической природы вектора $\boldsymbol{v}$. Они называются *потоком вектора* $\boldsymbol{v}$ через бесконечно малую площадку dS или конечную поверхность S соответственно. Так, интеграл $\Phi = \int \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}$ называют потоком вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, хотя с этим понятием и не связано никакое реальное течение.

Допустим, что вектор $\boldsymbol{E}$ представляется геометрической суммой

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i.$$

Умножив это соотношение скалярно на $d\boldsymbol{S}$ и проинтегрировав, получим

$$\Phi = \sum \Phi_i, \tag{5.1}$$

где Φ_1, Φ_2, ... — потоки векторов $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ... через ту же самую поверхность. Таким образом, из того факта, что векторы складываются *геометрически*, следует, что их потоки через одну и ту же поверхность складываются *алгебраически*.

2. Перейдем теперь к доказательству важнейшей теоремы электростатики — *теоремы Гаусса*. Она определяет поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S. За положительную нормаль к поверхности S примем *внешнюю нормаль*, т. е. нормаль, направленную наружу (рис. 13). Предположим сначала, что электрическое поле создается единственным точечным зарядом q. На поверхности S поле определяется выражением

$$\boldsymbol{E} = q\boldsymbol{r}/r^3. \tag{5.2}$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность S является сферой, а точечный заряд q помещен в ее центре. Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через элементарную площадку сферы равен

$$d\Phi = (\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\, dS = q\, dS/r^2,$$

а поток через всю сферу $\Phi = qS/r^2$. Так как поверхность сферы S равна $4\pi r^2$, то

$$\Phi = 4\pi q. \tag{5.3}$$

Покажем теперь, что результат (5.3) не зависит от формы поверхности S, окружающей заряд q. Возьмем произвольную элементарную площадку dS с установленным на ней положительным

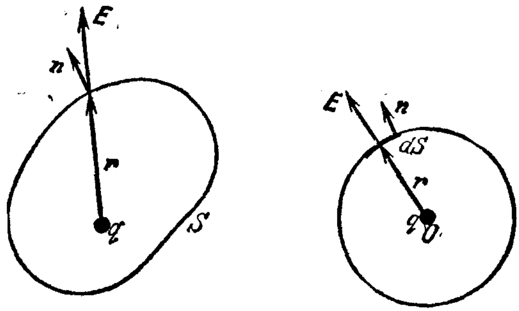

Рис. 13.

направлением нормали $\boldsymbol{n}$ (рис. 14). Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту площадку будет

$$d\Phi = (\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\, dS = E\, dS \cos\alpha = E\, dS_r,$$

где dS_r — проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную к радиусу $\boldsymbol{r}$. Используя выражение (5.2), получим

$$d\Phi = q\, dS_r/r^2.$$

Величина dS_r/r^2 есть телесный угол $d\Omega$, под которым из точки нахождения заряда q видна площадка dS_r, а следовательно, и площадка dS. Условимся считать его положительным, если площадка dS обращена к q внутренней стороной, и отрицательным в противоположном случае. Тогда

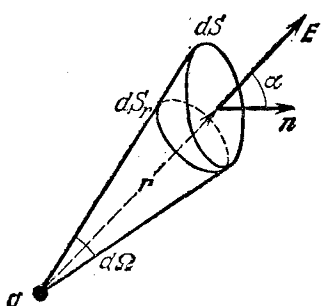

Рис. 14.

$$d\Phi = q\, d\Omega.$$

Поток Φ через произвольную (вообще говоря, незамкнутую) конечную поверхность S найдется интегрированием этого выражения по $d\Omega$. Так как заряд q не зависит от положения площадки dS, то $\Phi = q\int d\Omega$, или

$$\Phi = q\,\Omega, \qquad (5.4)$$

где Ω — телесный угол, под которым из точки нахождения заряда q видна поверхность S.

Если поверхность S замкнутая, то следует различать два случая.

С л у ч а й 1. Заряд q лежит внутри пространства, окруженного поверхностью S (рис. 15, *а*). В этом случае телесный угол Ω охватывает все направления в пространстве, т. е. равен 4π, а потому формула (5.4) переходит в (5.3). Не имеет значения, сколько раз прямая, исходящая из q, пересекает поверхность S. Допустим,

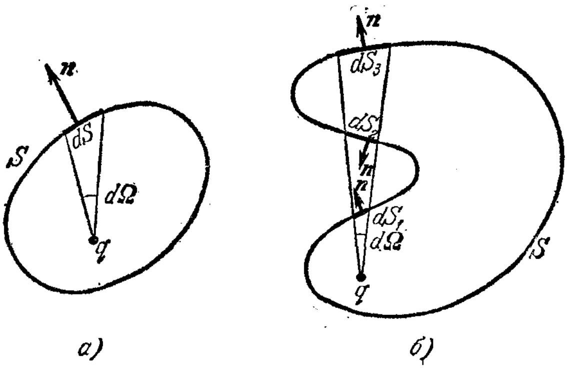

Рис. 15.

например, что пересечение происходит три раза (рис. 15, *б*). Абсолютные значения телесных углов, под которыми видны элементарные площадки dS_1, dS_2, dS_3, одинаковы. Однако площадка dS_3 обращена к q внутренней, а dS_2 — внешней сторонами. Сумма телесных углов, под которыми видны эти две площадки, равна нулю. Остается только телесный угол $d\Omega$, под которым видна площадка dS_1. И так будет всегда, когда число пересечений нечетное, т. е. в тех случаях, когда поверхность S окружает заряд q. Нечетное число пересечений при вычислении потока сводится к одному пересечению.

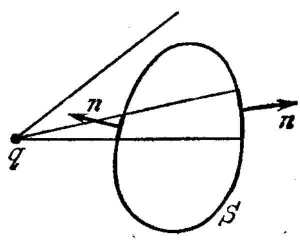

Рис. 16.

С л у ч а й 2. Заряд q лежит вне пространства, окруженного поверхностью S (рис. 16). В этом случае прямая, исходящая из заряда q, либо совсем не пересекает замкнутую поверхность S, либо пересекает ее четное число раз. Поэтому полный телесный угол Ω, а с ним и поток Φ равны нулю.

Случай, когда точечный заряд q лежит точно на поверхности S, физического смысла не имеет. Точечный заряд есть идеализация, пользоваться которой допустимо только в тех случаях, когда линейные размеры заряженного тела малы по сравнению с расстояниями, на которых рассматривается поле этого тела. Если же заряд лежит на поверхности, то точки последней вблизи самого заряда этому условию не удовлетворяют.

Допустим теперь, что поле $\boldsymbol{E}$ является суперпозицией полей $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ... точечных зарядов q_1, q_2, ... По теореме, доказанной выше, поток вектора $\boldsymbol{E}$ равен сумме потоков векторов $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ... Если заряд q_i окружен замкнутой поверхностью S, то его поток через эту поверхность будет $4\pi q_i$. Если же заряд лежит во внешнем пространстве по отношению к поверхности S, то его поток равен нулю. В результате получается следующее фундаментальное соотношение:

$$\Phi \equiv \oint (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q, \tag{5.5}$$

называемое *электростатической теоремой Гаусса.* Здесь q — алгебраическая сумма всех зарядов, окруженных замкнутой поверхностью S. Заряды, расположенные во внешнем пространстве по отношению к этой поверхности, на величину потока не влияют. При доказательстве предполагалось, что все заряды точечные. Но это ограничение легко снять, так как всякий заряд можно мысленно разделить на малые части, каждая из которых может рассматриваться как точечный заряд.

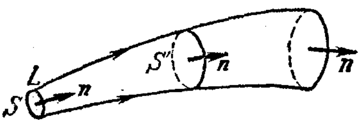

Рис. 17.

3. Возьмем какой-либо произвольный замкнутый контур L и через каждую точку его проведем электрическую силовую линию (рис. 17). Эти линии образуют трубчатую поверхность, называемую *силовой трубкой.* Рассмотрим произвольное поперечное сечение трубки поверхностью S. Положительную нормаль к S проведем в ту же сторону, в какую направлены силовые линии. Пусть Φ — поток вектора $\boldsymbol{E}$ через сечение S. Мы утверждаем, что если внутри трубки нет электрических зарядов, то поток Φ остается одним и тем же по всей длине трубки. Для доказательства возьмем другое поперечное сечение трубки S'. Рассмотрим замкнутую поверхность, ограниченную сечениями S и S' и боковой поверхностью трубки. Применим к ней теорему Гаусса. Поток через боковую поверхность равен нулю, так как на поверхности трубки вектор $\boldsymbol{E}$ нормален к ней. Поток через основание S численно равен Φ, но противоположен по знаку, так как внешняя нормаль к замкнутой поверхности направлена противоположно $\boldsymbol{n}$. Напротив, поток через основание S' равен $+\Phi'$. Полный поток через рассматриваемую замкнутую поверхность будет $\Phi' - \Phi$. По теореме Гаусса тот же поток равен нулю, так как внутри силовой трубки нет электрических зарядов. Таким образом, $\Phi' = \Phi$. В частности, если трубка бесконечно узкая, а сечения S и S' нормальны к ней, то

$$ES = E'S'.$$

Получается полная аналогия с течением несжимаемой жидкости. В тех местах, где трубка у́же, поле E сильнее. В тех местах, где она шире, поле E слабее. Следовательно, по густоте силовых линий можно судить о напряженности электрического поля (см. § 3, пункт 4).

4. Теорема Гаусса есть следствие закона Кулона. Последний по своей форме не отличается от закона всемирного тяготения Ньютона. И тут и там сила взаимодействия меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому теорема Гаусса справедлива также для гравитационных полей. Роль заряда играет гравитационная масса (умноженная на гравитационную постоянную). Различие состоит только в том, что электрические заряды могут быть и положительными и отрицательными, тогда как гравитационные массы всегда положительны.

§ 6. Применения теоремы Гаусса

Для расчета электрических полей произвольной системы зарядов теоремы Гаусса недостаточно. Это видно уже из того, что теорема Гаусса есть *скалярное соотношение.* А одного скалярного уравнения мало для определения трех неизвестных — составляющих E_x, E_y, E_z вектора E. Необходима известная симметрия задачи, чтобы последняя свелась к решению одного скалярного уравнения. В таких случаях (но и то далеко не всегда) теорема Гаусса может оказаться достаточной для вычисления вектора E. Приведем примеры.

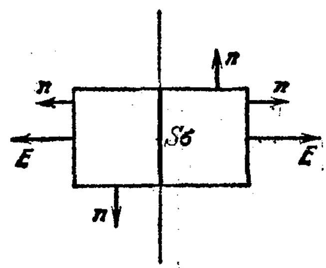

Рис. 18.

1. **Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.** Поверхностная плотность электричества σ на заряженной плоскости, по предположению, постоянна. Ввиду симметрии вектор E должен быть перпендикулярен к этой плоскости. Он направлен от плоскости, если она заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен. Ввиду той же симметрии длина вектора E может зависеть только от расстояния до заряженной плоскости, но не может зависеть от того, по какую сторону от нее находится точка наблюдения. Заметив это, построим цилиндр с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны плоскости, и с образующими, перпендикулярными к ней (рис. 18). Если S — площадь каждого из оснований, то поток вектора E через одно основание будет ES, а через оба основания $2ES$. Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как на ней векторы E и n взаимно перпендикулярны. Поток через всю поверхность цилиндра будет