Получается полная аналогия с течением несжимаемой жидкости. В тех местах, где трубка уже, поле E сильнее. В тех местах, где она шире, поле E слабее. Следовательно, по густоте силовых линий можно судить о напряженности электрического поля (см. § 3, пункт 4).

4. Теорема Гаусса есть следствие закона Кулона. Последний по своей форме не отличается от закона всемирного тяготения Ньютона. И тут и там сила взаимодействия меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому теорема Гаусса справедлива также для гравитационных полей. Роль заряда играет гравитационная масса (умноженная на гравитационную постоянную). Различие состоит только в том, что электрические заряды могут быть и положительными и отрицательными, тогда как гравитационные массы всегда положительны.

§ 6. Применения теоремы Гаусса

Для расчета электрических полей произвольной системы зарядов теоремы Гаусса недостаточно. Это видно уже из того, что теорема Гаусса есть *скалярное соотношение*. А одного скалярного уравнения мало для определения трех неизвестных — составляющих E_x, E_y, E_z вектора E. Необходима известная симметрия задачи, чтобы последняя свелась к решению одного скалярного уравнения. В таких случаях (но и то далеко не всегда) теорема Гаусса может оказаться достаточной для вычисления вектора E. Приведем примеры.

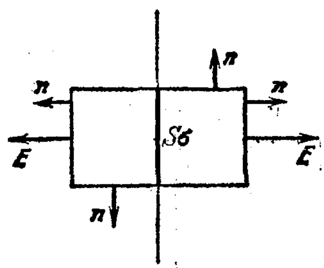

Рис. 18.

1. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Поверхностная плотность электричества σ на заряженной плоскости, по предположению, постоянна. Ввиду симметрии вектор E должен быть перпендикулярен к этой плоскости. Он направлен от плоскости, если она заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен. Ввиду той же симметрии длина вектора E может зависеть только от расстояния до заряженной плоскости, но не может зависеть от того, по какую сторону от нее находится точка наблюдения. Заметив это, построим цилиндр с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны плоскости, и с образующими, перпендикулярными к ней (рис. 18). Если S — площадь каждого из оснований, то поток вектора E через одно основание будет ES, а через оба основания $2ES$. Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как на ней векторы E и n взаимно перпендикулярны. Поток через всю поверхность цилиндра будет равен поэтому $\Phi = 2ES$. По теореме Гаусса тот же поток можно представить в виде $\Phi = 4\pi q = 4\pi\sigma S$. Сравнивая оба выражения, находим

$$E = 2\pi\sigma. \tag{6.1}$$

Такой же результат был получен ранее непосредственно из закона Кулона (см. задачу 2 к § 3).

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости, таким образом, не зависит от расстояния до нее. Плоскость может считаться бесконечной, если расстояние от нее пренебрежимо мало по сравнению с ее размерами. Только на таких расстояниях E не зависит от расстояния до плоскости. На бо́льших расстояниях формула (6.1) неприменима — напряженность поля убывает с расстоянием. Если расстояния порядка размеров самой плоскости, то величина и направление поля в пространстве меняются очень сложно. На расстояниях, очень больших по сравнению с размерами плоскости, заряженная плоскость действует как точечный заряд — поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

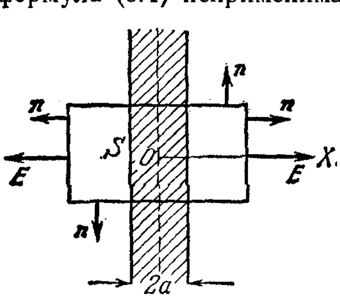

Рис. 19.

Отметим еще, что по разные стороны плоскости векторы E одинаковы по величине, но противоположны по направлению. Поэтому при переходе через заряженную плоскость напряженность электрического поля меняется скачком на величину $4\pi\sigma$.

2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластинки. Пусть $2a$ — толщина пластинки, а ρ — объемная плотность электричества внутри пластинки. По предположению величина ρ постоянна. Начало координат O поместим в средней плоскости пластинки, а ось X направим перпендикулярно к ней (рис. 19). Рассуждая, как в предыдущей задаче, найдем

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластинки,} \\ 4\pi\rho a & \text{вне пластинки.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Будем беспредельно уменьшать толщину пластинки, одновременно увеличивая плотность электричества ρ, чтобы величина ρa оставалась постоянной. В пределе получится бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью электричества $\sigma = \rho a$, а формула (6.2) перейдет в ранее полученную формулу (6.1).

3. П о л е ш а р а, р а в н о м е р н о з а р я ж е н н о г о п о п о в е р х н о с т и и о б ъ е м у. Ввиду шаровой симметрии вектор $\boldsymbol{E}$ параллелен или антипараллелен радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$, проведенному из центра шара в точку наблюдения, а его длина E может зависеть только от расстояния r. Заметив это, проведем вне шара концентрическую с ним сферу S радиуса r (рис. 20, *а*). Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту сферу $4\pi r^2 E$ по теореме Гаусса равен $4\pi q$, а потому для напряженности поля вне шара получаем

$$E = q/r^2, \tag{6.3}$$

независимо от того, заряжен ли шар по объему или по поверхности. Таким образом, *равномерно заряженный шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре*. Этот результат остается справедливым при *любом сферически симметричном* распределении заряда по объему шара. Разумеется, он верен и для поля тяготения.

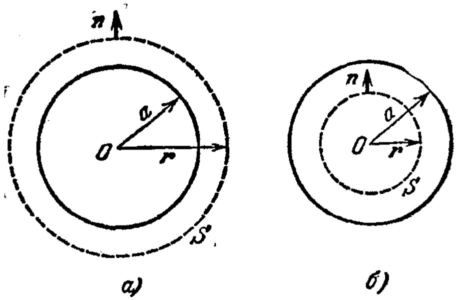

Рис. 20.

Когда радиус шара пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием r, мы получаем кулоново поле точечного заряда. Нельзя, однако, сказать, что закон Кулона является следствием теоремы Гаусса. Он получается из нее при дополнительном предположении, что поле неподвижного точечного заряда радиально и обладает шаровой симметрией.

Совершенно так же вычисляется поле внутри шара (рис. 20, *б*). Оно определяется выражением

$$E = q'/r^2, \tag{6.4}$$

где q' — заряд, ограниченный сферой радиуса r. Если заряд равномерно распределен по объему шара, то $q' = q\,(r/a)^3$. В этом случае

$$E = qr/a^3 = (4\pi/3)\,\rho r. \tag{6.5}$$

Если же заряд равномерно распределен по поверхности шара, то $q' = 0$, а потому также $E = 0$. Таким образом, *электрическое поле внутри сферической полости, равномерно заряженной по поверхности, равно нулю*. Результат остается справедливым и для случая, когда внутри сферической полости зарядов нет, а внешние заряды распределены сферически симметрично.

4. Уясним последний результат непосредственно с помощью закона Кулона. Пусть поверхность сферы равномерно заряжена

электричеством. Через произвольную точку A окружаемой ею полости проведем пучок лучей, вырезающий из сферы бесконечно малые площадки s_1 и s_2 (рис. 21). Проекции этих площадок на плоскость, перпендикулярную к оси пучка, s_1' и s_2' пропорциональны квадратам расстояний r_1 и r_2. То же справедливо для самих площадок s_1 и s_2 и находящихся на них зарядов q_1 и q_2. Действительно, если через ось пучка и центр сферы O провести плоскость (плоскость рисунка), то углы α_1 и α_2 будут равны между собой и, кроме того, $s_1' = s_1 \sin\alpha_1$, $s_2' = s_2 \sin\alpha_2$. Отсюда и следует наше утверждение. Из него получаем $q_1/r_1^2 = q_2/r_2^2$. Значит, кулоновы электрические поля, возбуждаемые в точке A зарядами q_1 и q_2, равны по величине и противоположны по направлению. Это справедливо для каждой пары зарядов типа q_1 и q_2, на которые можно мысленно разбить всю поверхность заряженной сферы. Поэтому полное электрическое поле должно обращаться в нуль в каждой точке сферической полости.

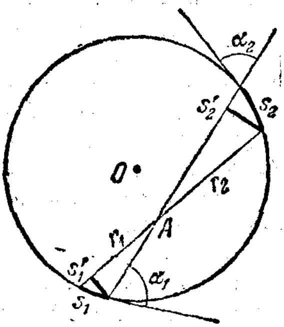

Рис. 21.

Мы видим, что теорема об отсутствии электрического поля внутри сферической полости, равномерно заряженной по ее поверхности, является следствием закона Кулона — обратной пропорциональности напряженности поля квадрату расстояния. Если бы поле менялось с расстоянием иначе, то теорема была бы неверна. Поэтому, как заметил Пристли (1733—1804), экспериментальная проверка этой теоремы может служить подтверждением самого закона Кулона. Такая косвенная проверка может быть выполнена с гораздо большей точностью, чем прямое измерение сил взаимодействия точечных зарядов. Впервые она была произведена в 1774 г. Кавендишем, а затем с большей точностью повторена Максвеллом в 1879 г. Кавендиш и Максвелл представили результаты своих измерений в следующей форме. Если принять, что сила взаимодействия точечных зарядов $F \sim 1/r^n$, то n может отличаться от 2 по измерениям Кавендиша не более чем на 1/50, а по измерениям Максвелла — не более чем на 1/20 000. Опыт с современными средствами измерений был повторен Плимптоном и Лаутоном в 1936 г. Они нашли, что n может отличаться от 2 не более чем на 10^{-9}. Конечно, зависимость типа $F \sim 1/r^n$ может и не соблюдаться. Реальная проблема состоит в нахождении расстояний, с которых начинает нарушаться закон Кулона, а также в установлении истинного закона сил, которым следует заменить закон Кулона на таких расстояниях. В настоящее время закон Кулона подтвержден до расстояний сантиметра или десятков сантиметров с относительной точностью порядка 10^{-9}.

Может показаться, что для достижения столь высокой точности с не меньшей точностью должна быть отшлифована и поверхность заряжаемой сферы, т. е. постоянство радиуса сферы должно быть выдержано с относительной точностью 10^{-9}. При радиусе сферы в 10 см это составляет 10^{-8} см — размер одного атома. С не меньшей точностью, казалось бы, должна оставаться постоянной и плотность электричества на поверхности сферы, а для этого необходимо, чтобы сфера абсолютно не подвергалась электрическому влиянию со стороны окружающих тел. Ни то, ни другое сделать, конечно, невозможно. Однако заботиться об этом и не надо. Форма полости и наружной поверхности тела не играет роли. В §§ 11 и 22 будет показано, что поле в полости, окруженной проводящей оболочкой любой формы, строго равно нулю, если только внутри полости нет заряженных тел. Это было бы не так, если бы закон Кулона нарушался.

Есть две области, в которых априори можно ожидать нарушений закона Кулона. Это, во-первых, область расстояний, меньших 10^{-14} см, где нет уверенности в применимости электромагнитной теории вообще. Это, во-вторых, область очень больших расстояний, начиная с географических и больше. Здесь мы также не располагаем непосредственными экспериментальными подтверждениями закона Кулона. Однако если бы закон Кулона нарушался при больших расстояниях, то, согласно современной квантовой электродинамике, квант света (фотон) обладал бы отличной от нуля массой покоя. А это означало бы, что скорость электромагнитных волн в вакууме должна зависеть от длины волны. Отсутствие такой зависимости позволяет сделать вывод, что закон Кулона верен до расстояний, по крайней мере, в несколько километров с относительной точностью $\sim 10^{-6}$.

5. П о л е б е с к о н е ч н о й п р я м о й л и н и и и б е с к о н е ч н о д л и н н о г о ц и л и н д р а. Поле бесконечной прямой линии, равномерно заряженной электричеством, направлено радиально — к линии или от нее, в зависимости от знака заряда. Его величина на расстоянии r от линии определяется формулой

$$E = 2\varkappa/r, \tag{6.6}$$

где $\varkappa$ — линейная плотность заряда, т. е. заряд, приходящийся на единицу длины линии. Той же формулой определяется поле бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объему или по поверхности, если точка наблюдения находится вне цилиндра. Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то поле внутри него равно нулю. Если же цилиндр равномерно заряжен по объему, то

$$E = 2\pi\rho r. \tag{6.7}$$

6. Рассмотрим теперь какую-то поверхность S, заряженную электричеством (рис. 22). Полупространство по одну сторону этой поверхности обозначим индексом 1, а по другую — индексом 2.

Поверхностная плотность электричества σ может меняться вдоль поверхности S произвольно. Возьмем бесконечно малый цилиндр, основания которого расположены по разные стороны от S. Высота цилиндра должна быть бесконечно мала по сравнению с линейными размерами его оснований. Если площадь основания ΔS, то внутри цилиндра находится электрический заряд $q = \sigma\,\Delta S$. Сумма потоков вектора E через основания цилиндра будет $(E_{n_1} + E_{n_2})\,\Delta S$, поток через боковую поверхность пренебрежимо мал. Приравнивая последнее выражение величине $4\pi\sigma\,\Delta S$, получаем

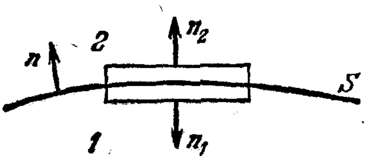

Рис. 22.

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\sigma. \qquad (6.8)$$

Здесь $\boldsymbol{n}_1$ означает внешнюю нормаль к поверхности S для полупространства 1, а $\boldsymbol{n}_2$ — для полупространства 2. Формуле (6.8) можно придать другой вид, проведя к поверхности S единую нормаль $\boldsymbol{n}$. Направим ее от полупространства 1 к полупространству 2. Тогда

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \qquad (6.9)$$

Таким образом, при переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{E}$ претерпевает разрыв, равный $4\pi\sigma$.

Происхождение скачка нормальной составляющей вектора $\boldsymbol{E}$ полезно уяснить с другой точки зрения. Полное электрическое поле в любой точке пространства складывается из внутреннего поля $\boldsymbol{E}_{\text{внутр}}$, т. е. поля, создаваемого зарядами самой площадки ΔS, и внешнего поля $\boldsymbol{E}_{\text{внеш}}$, т. е. поля, возбуждаемого всеми остальными зарядами. При пересечении площадки ΔS внешнее поле меняется непрерывно. Сама же площадка на бесконечно близких расстояниях от нее ведет себя как бесконечная заряженная плоскость. Создаваемое ею поле $\boldsymbol{E}_{\text{внутр}}$ нормально к площадке и равно $2\pi\sigma$. Однако направления этого поля по разные стороны площадки противоположны. По одну сторону оно увеличивает, а по другую уменьшает нормальную составляющую полного поля, т. е.

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{\text{внеш}} + 2\pi\sigma\boldsymbol{n}_1, \qquad \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{\text{внеш}} + 2\pi\sigma\boldsymbol{n}_2. \qquad (6.10)$$

Таким образом, скачок претерпевает только *внутреннее поле*, тогда как внешнее меняется непрерывно. А так как внутреннее поле не имеет тангенциальной составляющей, то тангенциальная составляющая полного поля меняется также непрерывно:

$$E_{1t} = E_{2t}. \qquad (6.11)$$

7. Из формул (6.10) получаем также

$$\boldsymbol{E}_{\text{внеш}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2). \qquad (6.12)$$

Пользуясь этим выражением, легко рассчитать электрические силы, действующие на заряженную поверхность. На площадку ΔS, очевидно, могут действовать только *внешние заряды*, а не заряды самой площадки. Электрическая сила, отнесенная к единице площади площадки ΔS, будет

$$\boldsymbol{f}=\sigma \boldsymbol{E}_{\text{внеш}}=\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2). \tag{6.13}$$

Исключив σ с помощью формулы (6.9), преобразуем этот результат к виду

$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{8\pi}(E_{2n}-E_{1n})(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2). \tag{6.14}$$

В частности, если поле нормально к заряженной поверхности, то

$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{8\pi}(E_2^2-E_1^2)\,\boldsymbol{n}. \tag{6.15}$$

Отсюда видно, что на единицу площади заряженной поверхности действуют силы натяжения $E_1^2/(8\pi)$ и $E_2^2/(8\pi)$, которые тянут ее наружу в противоположных направлениях.

8. Поле двух параллельных разноименно и равномерно заряженных плоскостей. Если плотности зарядов на обеих плоскостях одинаковы по величине, то будут одинаковы, но противоположно направлены и создаваемые ими поля. Между плоскостями направления полей совпадают, и при их сложении получается поле

$$E=4\pi\sigma \tag{6.16}$$

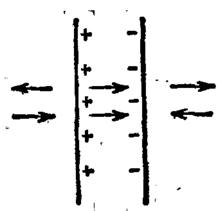

Рис. 23.

(рис. 23). Во внешнем пространстве направления полей противоположны, и результирующее поле равно нулю. К тем же результатам можно прийти с помощью общего соотношения (6.9).

ЗАДАЧИ

1. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 24). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) равен q_1 для первой пластинки и q_2 для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

Ответ. $\sigma_1=-\sigma_2={}^1/_2(q_1-q_2)$; $\sigma_1'=\sigma_2'={}^1/_2(q_1+q_2)$; $E=2\pi(q_1-q_2)$; $E'=2\pi(q_1+q_2)$.

2. Проводящая сфера радиуса R составлена из двух полусфер. Определить силу F, с которой отталкиваются эти полусферы, если полный заряд сферы равен Q.

Решение. Согласно формуле (6.15) на единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $f = Q^2 n/(8\pi R^4)$. Отсюда интегрированием легко получить

$$F = Q^2/(8R^2).$$

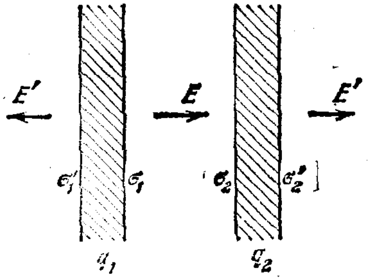

Рис. 24.

3. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в центре сферы поместить дополнительно точечный заряд q? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

Ответ. $F = Q(Q + 2q)/(8R^2)$.

4. Длинный проводящий цилиндр радиуса R разрезан вдоль продольной оси. Определить силу отталкивания F, действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд $\varkappa$.

Ответ. $F = \varkappa^2/(\pi R)$.

5. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если вдоль оси цилиндра поместить дополнительно тонкую заряженную нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa_0$? Цилиндр считать полым, а его стенки — бесконечно тонкими.

Ответ. $F = \varkappa(\varkappa + 2\varkappa_0)/(\pi R)$.

§ 7. Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса

1. Соотношение (5.5) выражает теорему Гаусса *в интегральной форме*. Придадим теперь этой теореме *дифференциальную форму*. Назовем *объемной плотностью электричества* ρ количество электричества, отнесенное к единице объема. Тогда заряд в элементе объема dV представится выражением $dq = \rho dV$. Будем предполагать, что величина ρ является непрерывной функцией пространственных координат. Представление о непрерывном распределении электричества в пространстве является такой же идеализацией, как и представление о непрерывном распределении вещества. Такими представлениями широко пользуются в макроскопической физике.

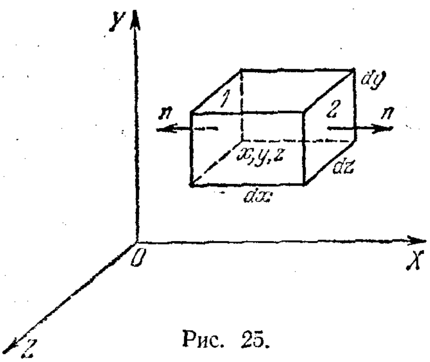

Рис. 25.

Возьмем в пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям прямоугольной системы координат (рис. 25). На грани 1 внешняя нормаль направлена в отрицательную сторону оси X. Поэтому поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту грань будет $-E_x(x)\,dy\,dz$. На