Решение. Согласно формуле (6.15) на единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $f = Q^2n/(8\pi R^4)$. Отсюда интегрированием легко получить

$$F = Q^2/(8R^2).$$

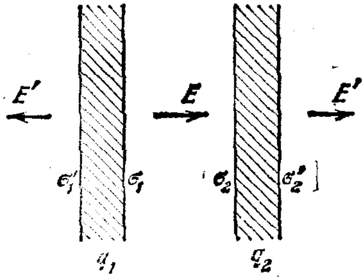

Рис. 24.

3. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в центре сферы поместить дополнительно точечный заряд q? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

Ответ. $F = Q(Q + 2q)/(8R^2)$.

4. Длинный проводящий цилиндр радиуса R разрезан вдоль продольной оси. Определить силу отталкивания F, действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд $\varkappa$.

Ответ. $F = \varkappa^2/(\pi R)$.

5. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если вдоль оси цилиндра поместить дополнительно тонкую заряженную нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa_0$? Цилиндр считать полым, а его стенки — бесконечно тонкими.

Ответ. $F = \varkappa(\varkappa + 2\varkappa_0)/(\pi R)$.

§ 7. Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса

1. Соотношение (5.5) выражает теорему Гаусса *в интегральной форме*. Придадим теперь этой теореме *дифференциальную форму*. Назовем *объемной плотностью электричества* ρ количество электричества, отнесенное к единице объема. Тогда заряд в элементе объема dV представится выражением $dq = \rho dV$. Будем предполагать, что величина ρ является непрерывной функцией пространственных координат. Представление о непрерывном распределении электричества в пространстве является такой же идеализацией, как и представление о непрерывном распределении вещества. Такими представлениями широко пользуются в макроскопической физике.

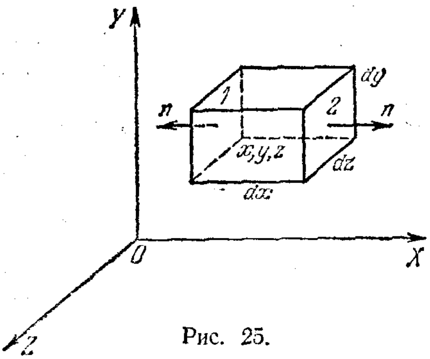

Рис. 25.

Возьмем в пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям прямоугольной системы координат (рис. 25). На грани 1 внешняя нормаль направлена в отрицательную сторону оси X. Поэтому поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту грань будет $-E_x(x)\,dy\,dz$. На противоположной грани 2, наоборот, направление внешней нормали совпадает с положительным направлением оси X, и для потока через эту грань следует писать $+E_x(x+dx)\,dy\,dz$. Сумма обоих потоков будет

$$[E_x(x+dx)-E_x(x)]\,dy\,dz=\frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV,$$

где $dV\equiv dx\,dy\,dz$ — объем параллелепипеда. Аналогично найдутся потоки через две пары остальных граней. Полный поток через всю поверхность параллелепипеда:

$$d\Phi=\operatorname{div}\boldsymbol{E}\cdot dV, \tag{7.1}$$

где введено обозначение

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}\equiv\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{7.2}$$

По теореме Гаусса тот же поток равен $4\pi q=4\pi\rho\,dV$. Приравнивая оба выражения, получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho. \tag{7.3}$$

Эта формула и выражает электростатическую теорему Гаусса в дифференциальной форме.

Величина, определяемая выражением (7.2), сохраняет смысл независимо от конкретной физической или геометрической природы вектора $\boldsymbol{E}$. Она называется *дивергенцией* вектора $\boldsymbol{E}$. С дивергенцией приходится встречаться в самых разнообразных вопросах математики и физики, чем и оправдывается введение этого математического понятия.

2. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (7.3) является следствием той же теоремы в интегральной форме (5.5). Обращая порядок рассуждений, легко убедиться, что из дифференциальной формы теоремы Гаусса можно получить интегральную. Обе формы математически эквивалентны. Правда, дифференциальная форма имеет смысл лишь в том случае, когда электричество распределено в пространстве с конечной плотностью ρ. Если ρ обращается в бесконечность в отдельных точках, на линиях или поверхностях, то дифференциальная форма становится неприменимой [1]), тогда как интегральная форма (5.5) применима и в таких случаях. В этом смысле интегральная форма обладает большей математической общностью, чем дифференциальная. Однако разрывные распределения электричества с бесконечно большими значениями ρ являются математическими абстракциями и в физике должны рассматри-

[1]) С использованием так называемых *обобщенных функций* дифференциальную форму теоремы Гаусса можно распространить и на эти случаи.

ваться как предельные случаи непрерывных распределений с всюду конечными значениями ρ. Если это иметь в виду, то можно утверждать, что *интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса полностью эквивалентны.*

3. В электростатике теорема Гаусса является не более как одним из следствий закона Кулона. Но мы не можем ограничиться электростатикой. Наша задача значительно шире. Мы должны путем обобщения опытных фактов отыскать общие уравнения и законы, применимые не только в электростатике, но и во всей электродинамике. В качестве руководящего принципа при отыскании таких законов можно выставить требование, чтобы они были законами *теории поля*, исключающими мгновенное действие на расстоянии. Закон Кулона этому требованию не удовлетворяет. Он может быть справедлив только в электростатике. Однако следствия, выводимые из него, могут иметь и более широкую область применимости. К числу таких следствий и относится теорема Гаусса. Она не противоречит теории поля с ее представлением о конечной скорости распространения взаимодействий. Записанная в дифференциальной форме, теорема Гаусса не содержит никаких намеков на дальнодействующий характер сил. Она является *локальной теоремой*. т. е. связывает различные физические величины (ρ и $\operatorname{div} E$) в одной и той же точке пространства. Законы теории поля не обязательно должны быть локальными. Однако все локальные законы совместимы с основным представлением этой теории о передаче взаимодействий посредством полей. С другой стороны, закон Кулона только достаточен, но не необходим для доказательства теоремы Гаусса. Поэтому естественно ввести гипотезу, что *теорема Гаусса верна не только в электростатике, но и в электродинамике*, имеющей дело с переменными во времени электромагнитными полями. Верна эта гипотеза или нет — на этот вопрос может дать ответ только опыт. Вся совокупность опытных фактов говорит в пользу этой гипотезы. Поэтому она и была принята в физике. Тем самым уравнение (7.3) и математически эквивалентное ему уравнение (5.5) перестают быть скромными следствиями закона Кулона, а возводятся в ранг *основных постулатов* теории электричества. Они входят в систему основных уравнений Максвелла.

Теорема Гаусса в интегральной форме (5.5) устанавливает связь между физическими величинами в сколь угодно удаленных точках пространства в один и тот же момент времени. Поэтому может показаться, что ее справедливость связана с предположением о мгновенном действии на расстоянии. Возможность представления теоремы Гаусса в дифференциальной форме показывает, что это не так. Формула (5.5) утверждает только, что с электрическим зарядом q всегда связано какое-то электрическое поле. Поле неограниченно долго покоящегося заряда кулоново на любых расстояниях. Но если заряд движется, то это уже не так. Например, ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны. Однако поток вектора E через любую замкнутую поверхность, окружающую одни и те же заряды, не зависит от формы и положения этой поверхности, а также от характера движения зарядов.

ЗАДАЧА

Получить формулы (6.1)—(6.3), (6.5)—(6.7), пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Решение. В качестве примера получим формулу (6.5). Ввиду шаровой симметрии

$$\mathbf{E}=E(r)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или в координатной форме

$$E_x=E(r)\frac{x}{r},\qquad E_y=E(r)\frac{y}{r},\qquad E_z=E(r)\frac{z}{r}.$$

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\partial r/\partial x = x/r$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2}-\frac{E}{r^3}x^2+\frac{E}{r}.$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\partial E_y/\partial y$ и $\partial E_z/\partial z$ и сложив, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{dE}{dr}+\frac{2E}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E). \tag{7.4}$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)=4\pi\rho,$$

откуда

$$E=\frac{4\pi}{3}\rho r+\frac{C}{r^2}.$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений. Аналогично найдем выражение для напряженности поля вне шара.

Обратим внимание на формулу (7.4.). Она дает выражение для дивергенции любого вектора, когда этот вектор направлен радиально и зависит только от расстояния до начала координат (сферическая симметрия).

§ 8. Математическое дополнение. Формула Гаусса — Остроградского

1. В различных вопросах теории электричества и других разделов теоретической физики часто применяется математическая формула, с помощью которой поток вектора через произвольную замкнутую поверхность выражается через объемный интеграл по области, ограниченной этой поверхностью. Приведем вывод этой формулы, хотя в большинстве случаев мы и будем избегать пользоваться ею. Пусть $f(x, y, z)$ — некоторая функция, а S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V (рис. 26). На отрезке 12, параллельном оси X, f является функцией одного аргумента x. Интегрируя вдоль этого отрезка, получим

$$\int_{12}\frac{\partial f}{\partial x}dx=f_2-f_1,$$