вектора $\boldsymbol{E}$ через любую замкнутую поверхность, окружающую одни и те же заряды, не зависит от формы и положения этой поверхности, а также от характера движения зарядов.

ЗАДАЧА

Получить формулы (6.1)—(6.3), (6.5)—(6.7), пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Решение. В качестве примера получим формулу (6.5). Ввиду шаровой симметрии

$$\boldsymbol{E}=E(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

или в координатной форме

$$E_x=E(r)\frac{x}{r}, \quad E_y=E(r)\frac{y}{r}, \quad E_z=E(r)\frac{z}{r}.$$

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\partial r/\partial x = x/r$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2}-\frac{E}{r^3}x^2+\frac{E}{r}.$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\partial E_y/\partial y$ и $\partial E_z/\partial z$ и сложив, получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{dE}{dr}+\frac{2E}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E). \tag{7.4}$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)=4\pi\rho,$$

откуда

$$E=\frac{4\pi}{3}\rho r+\frac{C}{r^2}.$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений. Аналогично найдем выражение для напряженности поля вне шара.

Обратим внимание на формулу (7.4.). Она дает выражение для дивергенции любого вектора, когда этот вектор направлен радиально и зависит только от расстояния до начала координат (сферическая симметрия).

§ 8. Математическое дополнение. Формула Гаусса — Остроградского

1. В различных вопросах теории электричества и других разделов теоретической физики часто применяется математическая формула, с помощью которой поток вектора через произвольную замкнутую поверхность выражается через объемный интеграл по области, ограниченной этой поверхностью. Приведем вывод этой формулы, хотя в большинстве случаев мы и будем избегать пользоваться ею. Пусть $f(x, y, z)$ — некоторая функция, а S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V (рис. 26). На отрезке *12*, параллельном оси X, f является функцией одного аргумента x. Интегрируя вдоль этого отрезка, получим

$$\int\limits_{12}\frac{\partial f}{\partial x}dx=f_2-f_1,$$

где f_1 и f_2 — значения функции f на концах рассматриваемого отрезка. Построим теперь бесконечно узкий цилиндр, одной из образующих которого является отрезок $1\ 2$. Пусть $d\sigma$ — площадь поперечного сечения его (величина существенно положительная). Умножим предыдущее соотношение на $d\sigma$. Так как $d\sigma\, dx$ есть элементарный объем dV, заштрихованный на рисунке, то в результате получится

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = d\sigma\,(f_2 - f_1),$$

где ΔV — часть объема V, вырезаемого из него поверхностью цилиндра. Пусть dS_1 и dS_2 — элементарные площадки, вырезаемые тем же цилиндром на поверхности S, а $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — единичные нормали к ним, проведенные наружу от поверхности S. Тогда $d\sigma = dS_2 \cdot n_{2x} = -dS_1 \cdot n_{1x}$, а потому

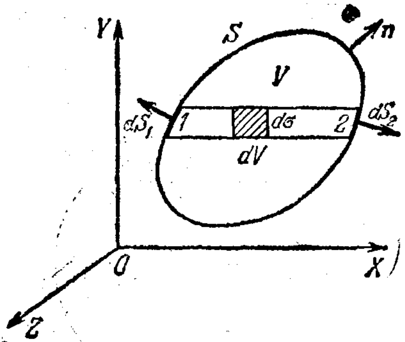

Рис. 26.

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = f_1 n_{1x}\, dS_1 + f_2 n_{2x}\, dS_2,$$

или, короче,

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_{dS_1 + dS_2} f n_x\, dS,$$

где поверхностный интеграл распространен по сумме площадок dS_1 и dS_2. Весь объем V можно разделить на элементарные цилиндры рассматриваемого вида и написать для каждого из них такие же соотношения. Суммируя эти соотношения, получим

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \oint_S f n_x\, dS. \tag{8.1}$$

Интеграл слева распространен по всему объему V, справа — по поверхности S, ограничивающей этот объем. Аналогичные соотношения можно написать для осей Y и Z.

Возьмем теперь произвольный вектор $\boldsymbol{A}$ и применим к его компонентам соотношение (8.1). Получим

$$\int_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dV = \oint_S A_x n_x\, dS,$$

и аналогично для компонент A_y и A_z. Складывая эти соотношения, найдем

$$\int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV = \oint_S (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z)\, dS,$$

или

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A} \cdot dV = \oint_S (\boldsymbol{A}\boldsymbol{n})\, dS. \tag{8.2}$$

Это и есть *формула Гаусса — Остроградского*. Ее можно также записать в виде

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A} \cdot dV = \oint_S (\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{S}). \tag{8.3}$$

2. Если объем V бесконечно мал, то величина $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ внутри него может считаться постоянной. Вынося ее за знак интеграла и переходя к пределу $V \to 0$, получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S (\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{S}). \tag{8.4}$$

Предельный переход надо понимать в том смысле, что область V должна стягиваться в точку, т. е. размеры этой области должны беспредельно уменьшаться по всем направлениям. Наши рассуждения показывают, что величина, стоящая в правой части (8.4), не зависит от формы поверхности S, стягиваемой в точку. Поэтому выражение (8.4) можно было бы принять за исходное определение дивергенции, как это часто и делается. Такое определение обладает тем преимуществом, что оно *инвариантно*, т. е. никак не связано с выбором системы координат.

На формуле (8.4) основан наиболее простой и общий способ вычисления дивергенции в различных системах координат. Вычислим, например, $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ в сферической системе координат r, ϑ, φ (рис. 27). Рассмотрим бесконечно малый «кубик», ограниченный плоскостями $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Сумма потоков вектора $\boldsymbol{A}$ через противоположные грани кубика 1 и 2 будет

$$d_1\Phi = -A_r(r)\, dS_1 + A_r(r + dr)\, dS_2 = \\ = \frac{\partial}{\partial r}(A_r\, dS)\, dr.$$

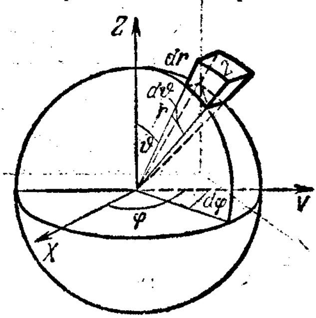

Рис. 27.

Подставляя сюда $dS = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, получим

$$d_1\Phi = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(r^2 A_r)\, dV,$$

где $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ — объем рассматриваемого «кубика». Аналогично находятся потоки через остальные две пары противоположных граней, а затем и выражение для дивергенции:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \tag{8.5}$$

Если вектор $\boldsymbol{A}$ направлен по $\boldsymbol{r}$ и зависит только от расстояния r, то это выражение переходит в (7.4).

Приведем другой пример на применение формулы Гаусса — Остроградского. Согласно (5.5) $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi q$, или для бесконечно малого объема $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi\rho V$. Подставив это значение в (8.4), получим $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, т. е. теорему Гаусса в дифференциальной форме.

ЗАДАЧА

Электрическое поле в электростатике всегда перпендикулярно к поверхности проводника (см. § 11, пункт 4). Пользуясь этим, доказать, что вблизи искривленной поверхности заряженного проводника электрическое поле удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{8.6}$$

где производная берется по направлению внешней нормали к поверхности проводника, а R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны этой поверхности (они считаются положительными для выпуклых и отрицательными для вогнутых сечений поверхности).