§ 16. Поле равномерно поляризованного шара

1. До поляризации в шаре была однородная смесь положительного и отрицательного электричеств с объемными плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Сдвинем все положительные заряды относительно отрицательных на одно и то же расстояние $\delta\boldsymbol{l}$. (На рис. 52 смещение δl сильно преувеличено. В практически важных случаях оно мало даже по сравнению с атомными размерами.) Шар равномерно поляризуется, причем вектор поляризации будет $\boldsymbol{P}=\rho\,\delta\boldsymbol{l}$. Мы видим, что поле $\boldsymbol{E}$ равномерно поляризованного шара есть векторная сумма полей двух равномерно и разноименно заряженных шаров, немного смещенных друг относительно друга. Рассмотрим два случая.

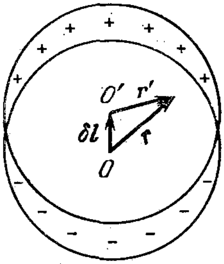

Рис. 52.

Случай 1. Поле внутри равномерно поляризованного шара. Пусть O и O' — центры отрицательно и положительно *заряженных шаров, а* $\boldsymbol{r}$ *и* $\boldsymbol{r}'$ — *радиусы-векторы, проведенные* из этих центров. Согласно формуле (6.5) поля этих шаров равны соответственно

$$\boldsymbol{E}_1=-\frac{4\pi}{3}\rho\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{E}_2=\frac{4\pi}{3}\rho\boldsymbol{r}',$$

а их геометрическая сумма

$$\boldsymbol{E}^{(i)}=\frac{4\pi}{3}\rho\,(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=-\frac{4\pi}{3}\rho\,\delta\boldsymbol{l},$$

или

$$\boldsymbol{E}^{(i)}=-\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \qquad (16.1)$$

Случай 2. Поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве. Пусть q — заряд положительного шара. Каждый шар возбуждает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара. Поэтому поле равномерно поляризованного шара во внешнем пространстве будет совпадать с полем точечного диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{p}=q\,\delta\boldsymbol{l}=V\boldsymbol{P}$, где V — объем шара. Следовательно, вне шара

$$\boldsymbol{E}^{(e)}=V\left[\frac{3(\boldsymbol{P}\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{P}}{r^3}\right].$$

Чтобы найти $E^{(e)}$ на границе шара, следует положить $V=\frac{4\pi}{3}r^3$.

Это дает

$$\boldsymbol{E}^{(e)} = 4\pi (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} - \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}, \tag{16.2}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

2. Равномерную поляризацию шара можно получить, поместив его во внешнее однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$. Для доказательства достаточно убедиться, что при этом будут удовлетворены условия в бесконечности и граничные условия на поверхности шара. Последние требуют, чтобы по разные стороны поверхности шара были одинаковы касательные составляющие векторов $\boldsymbol{E}$ и нормальные составляющие векторов $\boldsymbol{D}$. Полное поле $\boldsymbol{E}$ слагается из внешнего поля $\boldsymbol{E}_0$ и поля поляризованного шара. На бесконечности полное поле должно переходить в $\boldsymbol{E}_0$. Это условие, очевидно, удовлетворяется, так как на бесконечности поле поляризованного шара исчезает, поскольку оно убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Внутри шара $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{(i)}$, вне шара $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{(e)}$. Касательные составляющие обоих полей на поверхности шара одинаковы, как это видно из выражений (16.1) и (16.2). Вне шара индукция равна $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{(e)}$, внутри шара она будет $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{(i)} + 4\pi\boldsymbol{P}$. С учетом (16.1) и (16.2) отсюда получаем на поверхности шара

$$\boldsymbol{D}^{(e)} = \boldsymbol{E}_0 + 4\pi (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} - \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{D}^{(i)} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P} + 4\pi\boldsymbol{P}.$$

Отсюда видно, что нормальные составляющие этих векторов одинаковы. Значит, граничные условия удовлетворены, чем и завершается доказательство.

Полное поле внутри шара, как следует из формулы (16.1), определяется выражением

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \tag{16.3}$$

Вектор $\boldsymbol{P}$ отсюда можно исключить, используя выражение $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E}$. Таким образом получаем соотношение между внутренним и внешним полями:

$$\left(1 + \frac{4\pi}{3}\alpha\right)\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0, \tag{16.4}$$

или

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\boldsymbol{E}_0. \tag{16.5}$$

Вектор поляризации внутри шара будет

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E} = \frac{3\alpha}{\varepsilon+2}\boldsymbol{E}_0 = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\boldsymbol{E}_0.$$

В результате во внешнем однородном поле $\boldsymbol{E}_0$ шар радиуса a приобретет дипольный момент $\boldsymbol{p} = V\boldsymbol{P}$, или

$$\boldsymbol{p} = a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\boldsymbol{E}_0. \tag{16.6}$$

3. Рассчитаем теперь напряженность поля $\boldsymbol{E}'$ в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика в предположении, что поляризация вне полости всюду однородна. Тогда и внешнее поле в диэлектрике $\boldsymbol{E}$ будет также однородно. Если полость заполнить тем же равномерно поляризованным

диэлектриком, то к полю в полости $\boldsymbol{E}'$ добавится поле равномерно поляризованного шара $-\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}$. В результате должно получиться поле $\boldsymbol{E}$, т. е. $\boldsymbol{E}'-\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$. Отсюда

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \qquad (16.7)$$

Исключив вектор $\boldsymbol{P}$, найдем

$$\boldsymbol{E}'=\frac{\varepsilon+2}{3}\boldsymbol{E}. \qquad (16.8)$$

ЗАДАЧИ

1. *Найти приближенное выражение для силы, действующей в неоднородном* электрическом поле на маленькие диэлектрический и металлический шарики радиуса a.

Решение. Если бы внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ было однородно, то шарик приобрел бы дипольный момент, определяемый выражением (16.6). Тот же результат приближенно справедлив и в неоднородном поле. Используя его и формулу (4.8), находим искомую силу:

$$F=a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_0^2}{2}\right),$$

причем ось X мы направили вдоль вектора $\boldsymbol{E}_0$. Полагая $\varepsilon=\infty$, получаем формулу для проводящего шарика:

$$F=\frac{a^3}{2}\frac{\partial E_0^2}{\partial x}.$$

Сила F направлена в сторону возрастания поля E_0. Силами такого рода объясняется первое явление, с которого началось изучение электричества: притяжение наэлектризованными телами легких тел.

2. Как меняется с расстоянием r сила взаимодействия F между двумя маленькими шариками, из которых один заряжен, а другой не заряжен?

Ответ. $F\sim 1/r^5$.

3. В шаре, равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние R. Определить электрическое поле внутри полости.

Ответ. $\boldsymbol{E}={}^4/_3\pi\rho\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}=\overrightarrow{OO'}$. Поле однородно.

Указание. Заполнить мысленно полость электричествами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров. См. аналогичную задачу в т. I (§ 55, задача 7).

4. В неограниченной диэлектрической однородной жидкости с диэлектрической проницаемостью ε помещен однородный шар с той же диэлектрической проницаемостью, равномерно заряженный электричеством с объемной плотностью ρ. В шаре сделана сферическая полость, куда помещен меньший шар радиуса a из того же материала, также равномерно заряженный с объемной плотностью ρ электричеством того же знака. Зазор между поверхностью малого шара и стенками полости пренебрежимо мал. Определить силу $\boldsymbol{F}$, действующую на меньший шар, зная расстояние между центрами обоих шаров.

Решение. Поле большого шара в его полости однородно и равно $4\pi\rho\boldsymbol{R}/(3\varepsilon)$, где $\boldsymbol{R}=\overrightarrow{OC}$ — вектор, проведенный от центра большого шара O к центру малого шара C. Умножив это поле на заряд малого шара, найдем

$$\boldsymbol{F}=(4\pi\rho)^2a^3\boldsymbol{R}/(9\varepsilon).$$