ее бесконечно малым отрезком, соединяющим эти точки. Так как интеграл $\int \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$ вдоль этого отрезка также бесконечно мал, то для циркуляции $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{s}$ вдоль образовавшегося замкнутого контура получилась бы величина, отличная от нуля. А это невозможно.

4. С помощью формулы (17.2) можно строго доказать граничное условие (14.5) для вектора **E**. Пусть $ABCD$ — бесконечно малый прямоугольный контур, стороны которого AD и BC проходят по разные стороны границы раздела двух сред (рис. 55). Применим к нему формулу (17.2). Боковые стороны AB и CD возьмем бесконечно короткими по сравнению с AD и BC. Тогда можно пренебречь вкладом в циркуляцию, вносимым этими сторонами, и написать

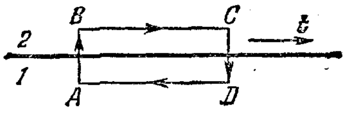

Рис. 55.

$$\oint\limits_{ABCD} \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = (E_{2t} - E_{1t})\,l,$$

где l — длина стороны BC или равной ей стороны AD. Из обращения в нуль этой циркуляции получаем

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{17.3}$$

§ 18. Электрический потенциал

1. Для потенциальных полей можно ввести понятие *потенциала* или, точнее, *разности потенциалов. Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ *между точками* 1 *и* 2 *называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути из точки* 1 *в точку* 2. Такое определение имеет смысл потому, что эта работа *не зависит от формы пути*, а определяется только положениями начальной и конечной точек его. Потенциалу какой-либо произвольной точки поля O можно условно приписать любое значение φ_0. Тогда потенциалы всех прочих точек поля определятся однозначно. Если изменить значение φ_0, то потенциалы в точке O и во всех других точках изменятся на одну и ту же постоянную. Таким образом, *потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной*. Значение этой постоянной не играет роли, так как физические явления зависят только от напряженностей электрических полей. Электрические же поля связаны не с абсолютными значениями потенциалов, а с их *разностями* между различными точками пространства. От значения аддитивной постоянной эти поля не зависят. В теоретической физике за нулевой потенциал удобно принимать потенциал бесконечно удаленной точки пространства. На практике за нулевой потенциал обычно принимают потенциал Земли.

Работа сил поля при перемещении заряда q по произвольному пути из начальной точки 1 в конечную точку 2 определятся выражением

$$A_{12} = q\,(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (18.1)$$

В гауссовой и СГСЭ-системах единиц за единицу потенциала принимается разность потенциалов между такими двумя точками, что при перемещении электростатической единицы электричества из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в один эрг. Эта единица не получила специального названия. Практической единицей потенциала является *вольт*. Вольт есть разность потенциалов между такими точками, когда при перемещении одного кулона электричества из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в один джоуль. Приближенно

$$1\ \text{В} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} = \frac{10^7\ \text{эрг}}{3\cdot 10^9\ \text{СГСЭ-ед. заряда}} = \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-ед. потенциала.}$$

2. Найдем связь потенциала с напряженностью электрического поля. Пусть 1 и 2 — бесконечно близкие точки, расположенные на оси X, так что $x_2 - x_1 = dx$. Работа при перемещении единицы заряда из точки 1 в точку 2 будет $E_x dx$. Та же работа равна $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$. Приравнивая оба выражения, получим $d\varphi = -E_x dx$. Аналогичное рассуждение применимо для осей Y и Z. В результате получаются три соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (18.2)$$

Их можно объединить в одну векторную формулу:

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right). \qquad (18.3)$$

Так как $\boldsymbol{E}$ есть вектор, то и выражение, стоящее в скобках, есть также вектор. Он называется *градиентом скаляра* φ и обозначается $\operatorname{grad}\varphi$, или $\nabla\varphi$. Его можно рассматривать как произведение символического вектора или оператора (4.6) на скаляр φ. Таким образом, по определению

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (18.4)$$

Теперь формулу (18.3) можно записать короче, а именно:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \qquad (18.5)$$

Произвольное векторное поле $\boldsymbol{E}\,(x, y, z)$ характеризуется тремя скалярными функциями — проекциями $E_x\,(x, y, z)$, $E_y\,(x, y, z)$, $E_z\,(x, y, z)$. Потенциальность накладывает на поле столь сильное ограничение, что для его характеристики достаточно *одной* скалярной функции, а именно потенциала $\varphi(x, y, z)$. Зная эту функцию, можно вычислить напряженность поля по формуле (18.3) или (18.5). Формулы (18.3) и (18.5) с особой отчетливостью показывают несущественность аддитивной постоянной в выражении для потенциала: при дифференцировании аддитивная постоянная выпадает и не влияет на результат. Те же формулы показывают, что напряженность поля имеет размерность потенциала, деленного на длину. На практике напряженность электрического поля часто выражают в вольтах на сантиметр или в вольтах на метр. Приближенно

$$1\ \text{В/см} \approx \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-единиц}, \qquad 1\ \text{В/м} \approx \frac{1}{30\,000}\ \text{СГСЭ-единиц}.$$

3. Для выяснения геометрического смысла градиента введем понятие *эквипотенциальных поверхностей*, или *поверхностей равного потенциала*. Как показывает само название, эквипотенциальная поверхность есть такая поверхность, на которой потенциал остается постоянным. Он может меняться только при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к другой. Возьмем на эквипотенциальной поверхности произвольную точку O и введем локальную систему координат с началом в этой точке (рис. 56). Ось Z направим по нормали $\boldsymbol{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала φ.

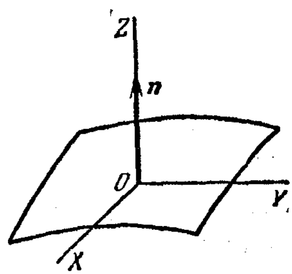

Рис. 56.

То же направление примем за положительное направление нормали $\boldsymbol{n}$. Координатная плоскость XY, очевидно, совместится с касательной плоскостью к эквипотенциальной поверхности. Тогда в точке O $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$. Кроме того, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$, $\partial\varphi/\partial z \equiv \partial\varphi/\partial n$. Формула (18.4) переходит в

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{18.6}$$

Функция φ возрастает наиболее быстро в направлении нормали $\boldsymbol{n}$. Поэтому можно дать следующее определение. *Градиент функции $\varphi(x, y, z)$ есть вектор, направленный в сторону максимального возрастания этой функции, а его длина равна производной функции φ в том же направлении.* Преимущество этого определения состоит в том, что оно носит *инвариантный характер*, т. е. никак не связано с выбором какой бы то ни было системы координат.

Проведем теперь в каком-либо направлении единичный вектор $\boldsymbol{s}$. Проекция вектора $\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{grad} \varphi$ на это направление будет $A_s = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s} \operatorname{grad} \varphi)$. Но ту же величину можно представить в виде производной $A_s = \partial\varphi/\partial s$, в чем легко убедиться, проведя в направлении $\boldsymbol{s}$ координатную ось и воспользовавшись одной из формул

(18.2). Таким образом, получается соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\boldsymbol{s} \operatorname{grad} \varphi). \tag{18.7}$$

Производная функции φ в каком-либо направлении равна проекции вектора градиента этой функции на то же направление. Ясно, что эта производная максимальна, когда вектор $\boldsymbol{s}$ направлен вдоль $\operatorname{grad} \varphi$, т. е. по нормали к эквипотенциальной поверхности.

4. Вектор $\boldsymbol{E}$ направлен противоположно вектору градиента потенциала φ. Электрические силовые линии являются, таким образом, линиями, вдоль которых потенциал φ изменяется *наиболее быстро*. Они *нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальные поверхности могут служить поэтому для наглядного изображения картины поля. Обычно их чертят так, что при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к соседней потенциал получает *одно и то же* приращение $\Delta\varphi$. Чем меньше выбрано $\Delta\varphi$, тем детальнее будет представлено распределение потенциала в пространстве, а с ним и картина электростатического поля. Для большей наглядности чертят также силовые линии, ортогональные к семейству поверхностей равного потенциала. Там, где (при постоянном $\Delta\varphi$) соседние эквипотенциальные поверхности наиболее близко подходят друг к другу, напряженность электрического поля максимальна. Наоборот, в местах, где расстояния между ними велики, будет мала и напряженность поля $\boldsymbol{E}$. Поверхность проводника есть одна из эквипотенциальных поверхностей, и силовые линии должны подходить к ней нормально. Внутри проводника $\boldsymbol{E} = 0$, а потому потенциал φ должен иметь одно и то же значение во всех точках проводника. Здесь эквипотенциальная поверхность вырождается в эквипотенциальный объем.

ЗАДАЧИ

1. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi) + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A}. \tag{18.8}$$

2. Доказать формулу

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, \tag{18.9}$$

где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

3. Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящихся в вакууме, крайние заземлены, а средней сообщен электрический заряд Q. Найти напряженность электрического поля во всем пространстве.

О т в е т. Электрическое поле радиально и определяется выражениями

$$E = \begin{cases} 0, \text{ если } r < R_1 \text{ или } R_3 < r < \infty, \\ \dfrac{R_1 (R_2 - R_3)}{R_2 (R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, \text{ если } R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{R_3 (R_2 - R_1)}{R_2 (R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, \text{ если } R_2 < r < R_3, \end{cases}$$

где r — расстояние от центра сфер.

4. Из трех параллельных металлических пластинок A, B и C (рис. 57) крайние A и B неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов V между ними постоянной. Средняя пластинка C сначала находится в контакте с верхней пластинкой A. Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженности полей E_1 и E_2 в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния x.

Ответ. $E_1 = Vx/d^2$,
$E_2 = V(x+d)/d^2$.

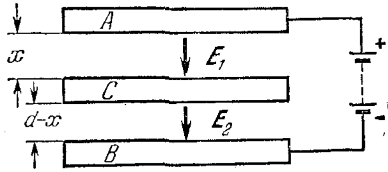

Рис. 57.

5. Внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена поляризованная пластинка из электрета толщины h. Вектор поляризации пластинки $\boldsymbol{P}$ перпендикулярен к ее боковым граням. Пренебрегая зависимостью поляризации электрета $\boldsymbol{P}$ от электрического поля, определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне пластинки, если расстояние между обкладками конденсатора AB равно d.

Ответ. В воздушном зазоре $E = D = 4\pi hP/d$. Внутри пластинки $E = -4\pi(d-h)P/d$, $D = 4\pi hP/d$.

§ 19. Вычисление потенциала по напряженности поля

Если известен потенциал $\varphi(x, y, z)$, то напряженность электрического поля можно вычислить его *дифференцированием* по координатам. Обратная задача вычисления потенциала по напряженности поля решается *интегрированием*. Исходными являются формулы (18.2) или им аналогичные. Рассмотрим простейшие примеры на вычисление потенциала.

1. Потенциал поля точечного заряда q в однородном диэлектрике. Индукция поля определяется выражением (13.10). Из него получаем

$$E = E_r = \frac{q}{\varepsilon r^2} = -\frac{d\varphi}{dr},$$

или после интегрирования

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} + \text{const}.$$

В качестве постоянной интегрирования следует взять нуль, чтобы при $r = \infty$ потенциал φ обратился в нуль. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \tag{19.1}$$

2. Потенциал поля системы точечных зарядов в однородном диэлектрике. На основании принципа суперпозиции из (19.1) получаем

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\sum \frac{q_i}{r_i}, \tag{19.2}$$