4. Из трех параллельных металлических пластинок A, B и C (рис. 57) крайние A и B неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов V между ними постоянной. Средняя пластинка C сначала находится в контакте с верхней пластинкой A. Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженности полей E_1 и E_2 в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния x.

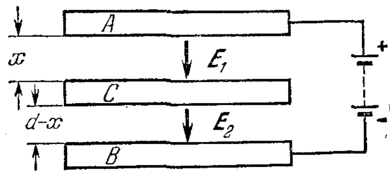

Рис. 57.

Ответ. $E_1 = Vx/d^2$,
$E_2 = V\,(x + d)/d^2$.

5. Внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена поляризованная пластинка из электрета толщины h. Вектор поляризации пластинки $\boldsymbol{P}$ перпендикулярен к ее боковым граням. Пренебрегая зависимостью поляризации электрета $\boldsymbol{P}$ от электрического поля, определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне пластинки, если расстояние между обкладками конденсатора AB равно d.

Ответ. В воздушном зазоре $E = D = 4\pi hP/d$. Внутри пластинки $E = -4\pi\,(d - h)\,P/d$, $D = 4\pi hP/d$.

§ 19. Вычисление потенциала по напряженности поля

Если известен потенциал $\varphi\,(x, y, z)$, то напряженность электрического поля можно вычислить его *дифференцированием* по координатам. Обратная задача вычисления потенциала по напряженности поля решается *интегрированием*. Исходными являются формулы (18.2) или им аналогичные. Рассмотрим простейшие примеры на вычисление потенциала.

1. Потенциал поля точечного заряда q в однородном диэлектрике. Индукция поля определяется выражением (13.10). Из него получаем

$$E = E_r = \frac{q}{\varepsilon r^2} = -\frac{d\varphi}{dr},$$

или после интегрирования

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} + \text{const}.$$

В качестве постоянной интегрирования следует взять нуль, чтобы при $r = \infty$ потенциал φ обратился в нуль. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \qquad (19.1)$$

2. Потенциал поля системы точечных зарядов в однородном диэлектрике. На основании принципа суперпозиции из (19.1) получаем

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\sum \frac{q_i}{r_i}, \qquad (19.2)$$

где r_i — расстояние i-го заряда до точки наблюдения. Суммирование ведется по всем зарядам.

3. **Потенциал непрерывно распределенных электрических зарядов.** Рассматривая заряды элементов объема и поверхности как точечные и применяя формулу (19.2), для потенциала φ в однородном диэлектрике можно написать

$$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(r')\,dV'}{|r-r'|} + \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\sigma(r')\,dS'}{|r-r'|}. \tag{19.3}$$

Здесь dV' и dS' — элементы объема и заряженных поверхностей с центрами в точке r'. Интегрирование ведется по всем объемным и поверхностным зарядам. Если диэлектрик неоднороден, то интегрирование надо распространить и на поляризационные заряды. Включение таких зарядов автоматически учитывает влияние среды, и величину ε вводить не надо:

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r') + \rho_{\text{пол}}(r')}{|r-r'|}\,dV' + \int \frac{\sigma(r') + \sigma_{\text{пол}}(r')}{|r-r'|}\,dS'. \tag{19.4}$$

Формула (19.3) является частным случаем этой формулы. Влияние поляризационных зарядов в ней учитывается посредством ε.

4. **Потенциал бесконечной равномерно заряженной плоскости в однородном диэлектрике.** В этом случае

$$\varphi = \begin{cases} -2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{при} \quad x > 0, \\ +2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{19.5}$$

Начало координат помещено на заряженной плоскости, ось X направлена перпендикулярно к ней. Постоянная C одна и та же в обоих выражениях, так как при переходе через заряженную плоскость потенциал должен изменяться непрерывно.

Никаким выбором постоянной C нельзя добиться обращения потенциала в нуль в бесконечности. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае в бесконечности имеются не только поля, но и сами заряды. Для плоскости конечных размеров выражениями (19.5) можно пользоваться только при таких x, которые малы по сравнению с размерами плоскости. При x порядка размеров плоскости выражение для φ становится очень сложным. На очень больших расстояниях плоскость ведет себя как точечный заряд. Разумеется, для конечной плоскости постоянную C в формулах (19.5) всегда можно выбрать так, чтобы в бесконечности потенциал обратился в нуль. Однако для вычисления C надо знать выражение для потенциала не только вблизи плоскости, но и на любых расстояниях от нее.

ЗАДАЧИ

Всюду предполагается, что диэлектрик однороден.

1. Вычислить потенциал поля точечного диполя.

Ответ.

$$\varphi=\frac{(pr)}{\varepsilon r^3}. \tag{19.6}$$

2. Дифференцированием (19.6) вычислить напряженность поля точечного диполя.

3. Вычислить потенциал поля шара радиуса a, равномерно заряженного по объему.

Ответ. Вне шара φ определяется формулой (19.1). Внутри шара

$$\varphi=\frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}(3a^2-r^2). \tag{19.7}$$

4. Вычислить потенциал поля сферы радиуса a, равномерно заряженной по поверхности.

Ответ. Вне сферы φ определяется формулой (19.1). Внутри сферы

$$\varphi=\frac{q}{\varepsilon a}=\text{const}. \tag{19.8}$$

5. Вычислить потенциал поля равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластинки толщины $2a$.

Ответ. Внутри пластинки

$$\varphi=-\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}(x^2+a^2)+C, \tag{19.9}$$

вне пластинки

$$\varphi=\begin{cases}-4\pi\rho a x/\varepsilon+C & \text{при} \quad x>a,\\ +4\pi\rho a x/\varepsilon+C & \text{при} \quad x<a.\end{cases} \tag{19.10}$$

Начало координат помещено в средней плоскости пластинки, ось X направлена нормально к ней.

6. Вычислить потенциал поля бесконечно длинной и бесконечно тонкой прямолинейной нити, равномерно заряженной электричеством с линейной плотностью $\varkappa$.

Ответ.

$$\varphi=-\frac{2\varkappa}{\varepsilon}\ln r+C, \tag{19.11}$$

где r — расстояние до нити.

7. Вычислить потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по объему.

Ответ.

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\varepsilon}\rho(a^2-r^2)+C & \text{при} \quad r\leqslant a,\\ -\dfrac{2\pi a^2\rho}{\varepsilon}\ln\dfrac{r}{a}+C & \text{при} \quad r\geqslant a\end{cases} \tag{19.12}$$

8. Вычислить потенциал поля бесконечно длинного цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по поверхности.

Ответ.

$$\varphi=\begin{cases}C & \text{при } r\leqslant a,\\ -\dfrac{2\pi a\sigma}{\varepsilon}\ln\dfrac{r}{a}+C & \text{при } r\geqslant a.\end{cases} \tag{19.13}$$

9. Показать, что эквипотенциальными поверхностями двух параллельных бесконечно длинных прямых, равномерно заряженных электричествами противоположных знаков, являются круговые цилиндры, оси которых параллельны рассматриваемым линиям и лежат с ними в одной плоскости.

Указание. Уравнение эквипотенциальной поверхности имеет вид $r_1/r_2 = \mathrm{const}$, где r_1 и r_2 — расстояния до рассматриваемых прямых. Записав это уравнение в координатах, нетрудно убедиться, что эквипотенциальными поверхностями будут круговые цилиндры.

§ 20. Измерение разности потенциалов электрометром. Электрический зонд

1. Электроскоп, листочки или стрелка которого окружены металлической оболочкой, может служить *электрометром*, т. е. прибором для измерения разности потенциалов между двумя проводниками. Один из проводников соединяют с шариком электрометра, а другой — с оболочкой (рис. 58). Стрелка электрометра примет потенциал тела A, оболочка — потенциал тела B. Возникнет электрическое поле с силовыми линиями, идущими от оболочки к стрелке или обратно. Угол отклонения стрелки определяется напряженностью и конфигурацией этого поля. Но поле внутри замкнутой металлической оболочки совершенно не зависит от наружного поля. Оно однозначно определяется разностью потенциалов между оболочкой и стрелкой. Следовательно, угол отклонения стрелки может служить мерой разности потенциалов между телами A и B. Электрометр можно проградуировать, чтобы сразу отсчитывать разность потенциалов в вольтах. Обычно в качестве тела B берут Землю, т. е. оболочку электрометра заземляют. Тогда электрометр покажет потенциал тела A относительно Земли.

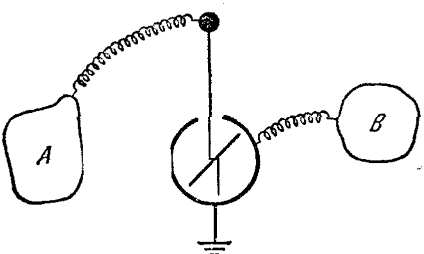

Рис. 58.

2. В принципе безразлично что заземлять: оболочку или шарик. От этого зависит только направление силовых линий, но не их конфигурация и величина напряженности поля внутри оболочки. Угол отклонения стрелки в обоих случаях будет одинаков. Установим электрометр на диэлектрике и заземлим его оболочку. Затем с помощью наэлектризованной палочки зарядим шарик. Стрелка отклонится. Заземлим теперь шарик, а оболочку изолируем. Той же палочкой электризуем оболочку, стрелка отклоняется так же. Но стрелка электрометра защищена от влияния внешних электрических зарядов, так как она окружена металлической оболочкой. Почему же при электризации оболочки стрелка отклоняется? Дело