этого времени протоны космических лучей продолжают достигать земной поверхности.

Ответ. $t=\frac{\mathscr{E}}{4\pi R I e^2}\approx 10^6$ с ≈ 10 сут (R — радиус Земли, e — заряд протона; численный ответ получен при $\mathscr{E}/e\sim 10^9$ В). В действительности потенциал Земли не может достигать такого значения, так как наряду с приходом протонов существует обратный процесс, в котором земная атмосфера теряет положительные заряды в виде протонов и положительных ионов, уходящих в космическое пространство под действием возникшего электрического поля.

§ 22. Общая задача математической электростатики

1. Если известен потенциал φ как функция пространственных координат, то его дифференцированием можно вычислить напряженность электрического поля по формуле (18.5). Зная диэлектрическую проницаемость, можно затем определить вектор индукции $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ и по теореме Гаусса (13.5) найти объемную плотность свободных зарядов ρ. Поверхностная плотность свободных зарядов найдется по скачку нормальной составляющей вектора $\boldsymbol{D}$ из соотношения (14.1).

Наоборот, если известны плотности свободных и связанных зарядов, то интегрированием можно вычислить потенциал по формуле (19.3) или (19.4), а затем найти и все остальные величины. Как правило, интегралы (19.3) или (19.4) не берутся аналитически, но они всегда могут быть найдены численно.

Реальные задачи, к которым приводит электростатика, гораздо сложнее. Дело в том, что связанные заряды, а также распределение свободного электричества по поверхности проводников не бывают известными, а сами подлежат определению. Общая задача математической электростатики формулируется следующим образом.

В диэлектрической среде заданы расположение и форма всех проводников. Известна диэлектрическая проницаемость среды ε между проводниками и объемная плотность свободных электрических зарядов во всех точках диэлектриков. Кроме того, известны: а) либо потенциалы всех проводников, б) либо заряды всех проводников, в) либо заряды некоторых проводников и потенциалы всех остальных проводников. Требуется определить напряженность электрического поля во всех точках пространства и распределение электричества по поверхностям проводников.

2. Задача сводится к нахождению потенциала φ, как функции пространственных координат x, y, z. Найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Для этого теорему Гаусса (13.5) запишем в виде $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E})=4\pi\rho$ и подставим в нее выражение для $\boldsymbol{E}$ из формулы (18.5). Получим

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi)=-4\pi\rho, \qquad (22.1)$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=-4\pi\rho. \qquad (22.1a)$$

Если диэлектрик однороден (ε не зависит от координат), то

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \qquad (22.2)$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (22.2a)$$

Введем так называемый *оператор Лапласа* или *лапласиан*:

$$\Delta\equiv\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (22.3)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\equiv\Delta\varphi\equiv\nabla^2\varphi \qquad (22.4)$$

и уравнение (22.2a) запишется в более кратком виде:

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (22.5)$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. При отсутствии свободных зарядов ($\rho=0$) оно переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\Delta\varphi=0. \qquad (22.6)$$

Общая электростатическая задача сводится к нахождению решения дифференциального уравнения (22.1), удовлетворяющего всем условиям, перечисленным выше. Можно показать, что такая задача не может иметь более одного решения [1]). Для того чтобы не повторять дважды одни и те же математические выкладки, мы отложим доказательство этой *теоремы единственности* до § 29. Нахождение самого решения, вообще говоря, задача очень сложная. Аналитические решения известны лишь для немногих частных случаев. Однако если удалось угадать функцию φ, удовлетворяющую всем условиям задачи, то можно утверждать, что она и будет искомым (единственным) решением задачи. В этом и состоит значение теоремы единственности.

Не всегда требуется задавать заряды или потенциалы тел *во всем пространстве*. Если требуется найти электрическое поле в полости, окруженной проводящей оболочкой, то это достаточно сделать только для тел, заключенных *в самой полости*. Наоборот, если требуется найти внешнее поле, то надо задать заряды или

[1]) Если заданы только заряды всех проводников, то потенциал φ определяется с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

потенциалы только тел *вне проводящей оболочки*, а также общий заряд или потенциал на внешней поверхности этой оболочки. Теорема единственности распространяется и на эти случаи.

Приведем два примера на применение теоремы единственности.

3. Пусть в вакууме распределено электричество с объемной плотностью ρ. Потенциал электрического поля φ_0 будет удовлетворять уравнению $\Delta\varphi_0 = -4\pi\rho$. Заполним все пространство однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, оставляя свободные заряды на прежних местах. Тогда потенциал изменится и будет удовлетворять уравнению (22.5). Сравнив оба уравнения и применив теорему единственности, найдем $\varphi = \varphi_0/\varepsilon$. Таким образом, заполнение пространства однородным диэлектриком уменьшает потенциал, а с ним и напряженность электрического поля в ε раз. Результат остается верным и при наличии поверхностных зарядов.

4. В качестве второго примера рассмотрим теорему Фарадея (§ 11, пункт 5). Часть результатов, относящихся к этой теореме, была получена нами интуитивно на основе физических соображений. Теорема единственности позволяет обосновать их строго. Пусть в полости, окруженной проводящей оболочкой, нет электрических зарядов. Потенциал внутри полости удовлетворяет уравнению Лапласа (22.6). На стенках полости он должен принимать какое-то постоянное значение C. Решение уравнения (22.6), удовлетворяющее этому условию, можно указать сразу. Это есть $\varphi(x, y, z) = C$. По теореме единственности других решений быть не может. Таким образом, внутри полости $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = 0$, что и доказывает теорему Фарадея.

§ 23. Метод электрических изображений

1. В ближайших четырех параграфах рассматриваются некоторые задачи на вычисление электростатических полей. Все они решаются *искусственными методами*. Начнем с *метода электрических изображений*.

Допустим, что в пространстве имеется несколько точечных электрических зарядов. Пусть S — какая-либо эквипотенциальная поверхность, разделяющая все пространство на два полупространства: I и I' (рис. 63). Обозначим через $q_1, q_2, \ldots$ точечные заряды в полупространстве I, а через $q_1', q_2', \ldots$ — в полупространстве I'. Точечные заряды можно рассматривать как предельные случаи малых проводящих тел, например металлических шариков. К ним применима теорема единственности. Заданием величины и расположения зарядов $q_1, q_2, \ldots$, а также потенциала поверхности S поле в полупространстве I определяется однозначно. Аналогичное утверждение справедливо для полупространства I'. Поэтому если поверхность S сделать проводящей, то поле во всем пространстве