

потенциалы только тел *вне проводящей оболочки*, а также общий заряд или потенциал на внешней поверхности этой оболочки. Теорема единственности распространяется и на эти случаи.

Приведем два примера на применение теоремы единственности.

3. Пусть в вакууме распределено электричество с объемной плотностью ρ . Потенциал электрического поля ϕ_0 будет удовлетворять уравнению $\Delta\phi_0 = -4\pi\rho$. Заполним все пространство однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , оставляя свободные заряды на прежних местах. Тогда потенциал изменится и будет удовлетворять уравнению (22.5). Сравнив оба уравнения и применив теорему единственности, найдем $\phi = \phi_0/\epsilon$. Таким образом, заполнение пространства однородным диэлектриком уменьшает потенциал, а с ним и напряженность электрического поля в ϵ раз. Результат остается верным и при наличии поверхностных зарядов.

4. В качестве второго примера рассмотрим теорему Фарадея (§ 11, пункт 5). Часть результатов, относящихся к этой теореме, была получена нами интуитивно на основе физических соображений. Теорема единственности позволяет обосновать их строго. Пусть в полости, окруженной проводящей оболочкой, нет электрических зарядов. Потенциал внутри полости удовлетворяет уравнению Лапласа (22.6). На стенках полости он должен принимать какое-то постоянное значение C . Решение уравнения (22.6), удовлетворяющее этому условию, можно указать сразу. Это есть $\phi(x, y, z) = C$. По теореме единственности других решений быть не может. Таким образом, внутри полости $E = -\text{grad } \phi = 0$, что и доказывает теорему Фарадея.

§ 23. Метод электрических изображений

1. В ближайших четырех параграфах рассматриваются некоторые задачи на вычисление электростатических полей. Все они решаются *искусственными методами*. Начнем с *метода электрических изображений*.

Допустим, что в пространстве имеется несколько точечных электрических зарядов. Пусть S — какая-либо эквипотенциальная поверхность, разделяющая все пространство на два полупространства: I и I' (рис. 63). Обозначим через q_1, q_2, \dots точечные заряды в полупространстве I , а через q'_1, q'_2, \dots — в полупространстве I' . Точечные заряды можно рассматривать как предельные случаи малых проводящих тел, например металлических шариков. К ним применима теорема единственности. Заданием величины и расположения зарядов q_1, q_2, \dots , а также потенциала поверхности S поле в полупространстве I определяется однозначно. Аналогичное утверждение справедливо для полупространства I' . Поэтому если поверхность S сделать проводящей, то поле во всем пространстве

не претерпит никаких изменений. Однако поля в полупространствах I и I' сделаются теперь совершенно независимыми друг от друга. В результате мы получаем решение сразу двух задач, вполне аналогичных друг другу. Одна из них состоит в следующем.

В полупространстве I по одну сторону от поверхности проводящего тела S находятся точечные заряды q_1, q_2, \dots . Найти электрическое поле в этом полупространстве. Конечно, это поле векторно складывается из полей зарядов q_1, q_2, \dots и зарядов, индуцированных на поверхности тела S . Однако, в силу теоремы единственности, поле индуцированных зарядов в полупространстве I эквивалентно полю, создаваемому зарядами q'_1, q'_2, \dots . При вычислении искомого

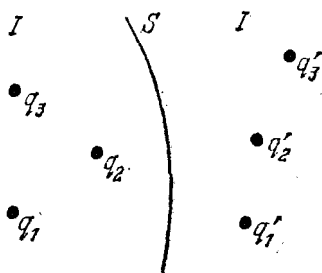


Рис. 63.

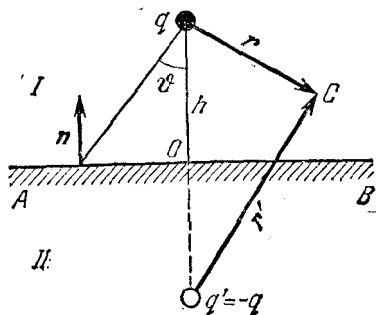


Рис. 64.

поля проводящее тело можно убрать и заменить его точечными зарядами q'_1, q'_2, \dots . Совокупность этих последних зарядов называется *электрическим изображением* зарядов q_1, q_2, \dots в поверхности S . Таким образом, задача об электрическом поле зарядов, расположенных по одну сторону от проводящей поверхности, сводится к отысканию электрических изображений этих зарядов в этой поверхности.

Приведем два примера на метод электрических изображений.

2. Точечный заряд q над бесконечной плоской поверхностью проводника. Электрическим изображением заряда q в плоскости AB будет заряд противоположного знака $q' = -q$, расположенный по другую сторону плоскости AB на таком же расстоянии от нее, что и заряд q (рис. 64). Действительно, потенциал поля точечных зарядов q и q' в какой-либо точке C над поверхностью проводника будет

$$\varphi = q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right). \quad (23.1)$$

Он обращается в нуль на плоскости AB , а потому эта плоскость является эквипотенциальной. Формула (23.1) и определяет потенциал поля в верхнем полупространстве I . В нижнем полупростран-

стве II , заполненном проводящей средой, поле, разумеется, равно нулю. Таким образом, заряд q индуцирует на плоскости AB такие заряды, которые создают в верхнем полупространстве I такое же поле, что и вспомогательный точечный заряд $q' = -q$. Отсюда следует, что индуцированные заряды притягивают заряд q с той же силой, что и вспомогательный заряд $q' = -q$, т. е. с силой $F = = q^2/(2h)^2$, где h — расстояние между зарядом q и плоскостью AB . Поэтому эта сила называется *силой электрического изображения*. В нижнем полупространстве II индуцированные заряды компенсируют поле заряда q .

Поверхностная плотность электричества найдется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Простое вычисление дает

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi h^2} \cos^3 \theta. \quad (23.2)$$

Полный индуцированный заряд на бесконечной плоскости AB равен и противоположен по знаку заряду q . В этом легко убедиться непосредственным интегрированием выражения (23.2) по плоскости AB . Еще проще воспользоваться теоремой Гаусса. Окружим заряд q и индуцированные заряды бесконечно удаленной сферой с центром в точке O . На полусфере, проходящей внутри проводящей среды, поле и его поток равны нулю. На полусфере, проходящей в

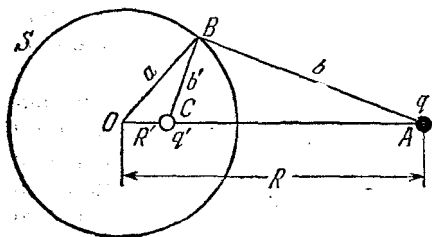


Рис. 65.

вакууме, поле совпадает с полем точечного диполя, а потому обратно пропорционально кубу радиуса. Сама поверхность полусферы возрастает пропорционально квадрату радиуса. Поток вектора E через нее в пределе $r \rightarrow \infty$ обращается в нуль. По теореме Гаусса должен обратиться в нуль и полный заряд, окруженный сферой. Но этот заряд равен $q + q_{\text{инд}}$, где $q_{\text{инд}}$ — полный индуцированный заряд на плоскости AB . Значит, $q_{\text{инд}} = -q$.

3. Точечный заряд q вблизи проводящей сферы (рис. 65). Допустим, что сфера S радиуса a заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Величина точечного заряда q и его расстояние до центра сферы $R = OA$ заданы. Этими условиями решение электростатической задачи определяется однозначно. Поле внутри сферы, по теореме Фарадея, равно нулю. Найдем поле вне сферы. Выберем на прямой OA такую точку C , чтобы треугольник

$ОВС$ был подобен треугольнику $ОВА$. Поместим в этой точке вспомогательный точечный заряд q' . Если b и b' — длины отрезков $ВА$ и $ВС$, то потенциал зарядов q и q' в точке $В$ будет $(q/b + q'/b')$. Он обратится в нуль, если

$$q' = -\frac{b'}{b}q = -\frac{a}{R}q. \quad (23.3)$$

Мы видим, что величина q' не зависит от положения точки $В$ на сфере S . Следовательно, потенциал, создаваемый зарядами q и q' , обращается в нуль во всех точках сферы S , т. е. q' является электрическим изображением заряда q в сфере S . Вне сферы на расстояниях r и r' от зарядов q и q' потенциал определяется выражением

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}. \quad (23.4)$$

Общий заряд $q_{\text{инд}}$, индуцированный на сфере S , равен по величине и совпадает по знаку с зарядом q' . Для доказательства возьмем произвольную замкнутую поверхность Σ , окружающую сферу S , но не окружающую заряд q . На поверхности Σ поле E совпадает с полем точечных зарядов q и q' , из которых q лежит вне Σ . Поэтому поток Φ этого поля через поверхность Σ будет $\Phi = 4\pi q'$. По теореме Гаусса тот же поток равен $\Phi = 4\pi q_{\text{инд}}$. Следовательно, $q_{\text{инд}} = q'$.

Если потенциал сферы S равен φ_0 , то для решения задачи надо ввести еще один фиктивный заряд $q_0 = a\varphi_0$, поместив его в центре O сферы S . Поле во внешнем пространстве представится суперпозицией полей трех зарядов: q , q' , q_0 . Действительно, потенциал зарядов q и q' на сфере S равен нулю. Потенциал на S создается только зарядом q_0 , т. е. равен $q_0/a = \varphi_0$.

Заметим, наконец, что электрические заряды q и q' обладают свойством взаимности. Оно заключается в следующем. Если q' является электрическим изображением заряда q , то, и наоборот, заряд q является электрическим изображением заряда q' . Это замечание позволяет распространить изложенный метод на случай, когда точечный заряд внесен внутрь сферической полости, сделанной в проводящей среде.

4. Допустим теперь, что сфера S изолирована и задан ее заряд q_0 . Нетрудно заметить, что в этом случае для определения поля во внешнем пространстве к зарядам q и q' надо добавить третий (фиктивный) заряд $q_0 - q'$, поместив его в центре сферы O . Рассмотрим специально частный случай, когда $q_0 = 0$. Индукционные заряды возбуждают во внешнем пространстве такое же поле, что и диполь длины R' с дипольным моментом $p = -q'R'$, который направлен по полю E , создаваемому зарядом q . Будем неограниченно удалять заряд q , одновременно увеличивая его так, чтобы поле E в центре сферы оставалось неизменным. В пределе получится однородное

электрическое поле, в которое внесен проводящий шар. При этом $p = -q'R' = a^3q/R^2 = a^3E$, или в векторной форме

$$p = a^3E. \quad (23.5)$$

Этот результат уже был получен в § 16.

ЗАДАЧИ

1. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (см. рис. 65). Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен, 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

Ответ. 1) $F = \frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2} q^2$; 2) $F = \left(\frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2} - \frac{a}{R^3} \right) q^2$.

2. В условиях предыдущей задачи найти работу A , которую надо совершить, чтобы точечный заряд q удалить в бесконечность.

Ответ. 1) $\frac{aq^2}{2(R^2 - a^2)}$; 2) $\frac{a^3q^2}{2R^2(R^2 - a^2)}$.

3. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A на расстоянии $OA = a$ от ее центра помещен точечный заряд q (рис. 66). Радиус внутренней поверхности оболочки равен r , а внешней R . Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки;

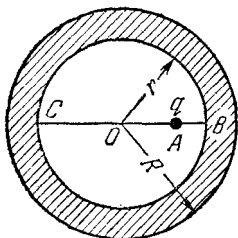


Рис. 66.

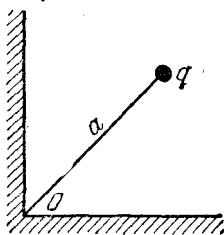


Рис. 67.

2) потенциал оболочки, принимая за нуль потенциал бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

Ответ. 1) $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$; 2) $\varphi = \frac{q}{R}$; 3) $\sigma_B = \frac{q}{4\pi(r-a)^2} \left(1 + \frac{a}{r}\right)$, $\sigma_C = \frac{q}{4\pi(r+a)^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$.

4. Найти силу, действующую на точечный заряд q , помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (рис. 67). Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла равно a .

Ответ. $F = \frac{q^2}{4a^2} (2\sqrt{2} - 1)$. Сила F направлена к вершине двугранного угла O .

5. Точечный заряд q находится между двумя металлическими плоскостями, образующими между собой угол 60° (рис. 68). Найти предел, к которому стремится напряженность электрического поля E , когда точка наблюдения приближается к ребру O , все время оставаясь между металлическими плоскостями. Как изменится результат, если заряд будет не точечным?

Решение. Нетрудно убедиться, что электрическим изображением заряда q относительно поверхности AOB будет совокупность пяти зарядов: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 . Поле этих зарядов и заряда q в точке O равно нулю. Результат не изменится, если заряд q будет не точечным.

6. На бесконечной плоской поверхности проводника имеется сферический бугор CMD , центр которого O лежит в той же плоскости (рис. 69). На перпендикуляре OM вне проводника расположен точечный заряд q . Найти электрическое поле во всем пространстве.

Решение. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 69. Сгруппируем заряды попарно: 1) q с $-q$, 2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем теперь те же

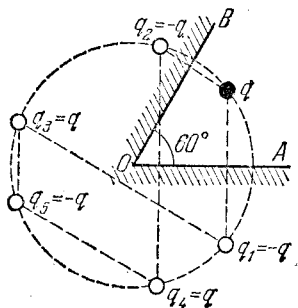


Рис. 68.

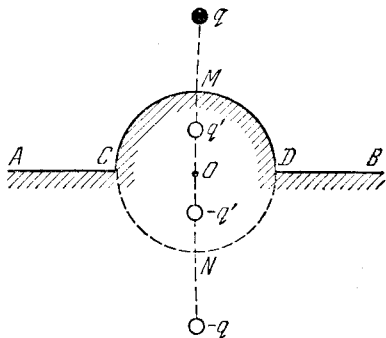


Рис. 69.

заряды по-другому: 1) q с q' , 2) $-q$ с $-q'$. При такой группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере $CMDN$. Ясно поэтому, что потенциал четырех зарядов $q, -q, q', -q'$ обращается в нуль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

7. Найти силу притяжения F между точечным электрическим диполем и бесконечной металлической пластинкой, если момент диполя p перпендикулярен к плоскости пластинки, а расстояние его до ближайшей поверхности пластинки равно h . Определить также работу A_{12} , которую надо затратить, чтобы удалить диполь от пластинки с расстояния h_1 до h_2 .

Ответ. $F = \frac{3p^2}{8h^4}$, $A_{12} = \frac{p^2}{8} \left(\frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right)$. Обратим внимание, что перемещение диполя сопровождается смещением индуцированных им зарядов. Однако это смещение происходит перпендикулярно к силовым линиям и поэтому не сопровождается дополнительной работой.

§ 24. Точечный заряд над плоской поверхностью диэлектрика

Пусть два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 граничат друг с другом вдоль плоскости MN (рис. 70). В точке A первого диэлектрика помещен точечный заряд q . Найдем электрическое поле в каждом из диэлектриков. В окрестности точки A поле должно стремиться к бесконечности, как кулоново поле точечного заряда q . Поэтому поле в первом диэлектрике должно содержать слагаемое $qr/(\epsilon_1 r^3)$. К нему надо добавить поле поляризационных зарядов, возникших на границе раздела диэлектриков. Введем предположение,