Р е ш е н и е. Нетрудно убедиться, что электрическим изображением заряда q относительно поверхности AOB будет совокупность пяти зарядов: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. Поле этих зарядов и заряда q в точке O равно нулю. Результат не изменится, если заряд q будет не точечным.

6. На бесконечной плоской поверхности проводника имеется сферический бугор CMD, центр которого O лежит в той же плоскости (рис. 69). На перпендикуляре OM вне проводника расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве.

Р е ш е н и е. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 69. Сгруппируем заряды попарно: 1) q с $-q$, 2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем теперь те же

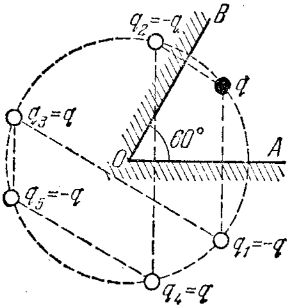

Рис. 68.

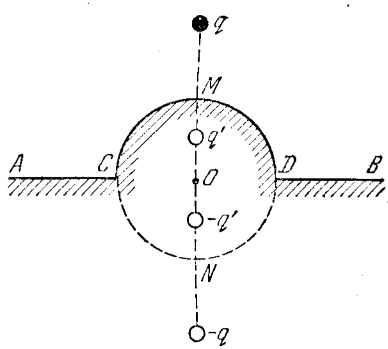

Рис. 69.

заряды по-другому: 1) q с q', 2) $-q$ с $-q'$. При такой группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере $CMDN$. Ясно поэтому, что потенциал четырех зарядов q, $-q$, q', $-q'$ обращается в нуль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

7. Найти силу притяжения F между точечным электрическим диполем и бесконечной металлической пластинкой, если момент диполя $\mathbf{p}$ перпендикулярен к плоскостям пластинки, а расстояние его до ближайшей поверхности пластинки равно h. Определить также работу A_{12}, которую надо затратить, чтобы удалить диполь от пластинки с расстояния h_1 до h_2.

О т в е т. $F=\frac{3p^2}{8h^4}$, $A_{12}=\frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{h_1^3}-\frac{1}{h_2^3}\right)$. Обратим внимание, что перемещение диполя сопровождается смещением индуцированных им зарядов. Однако это смещение происходит перпендикулярно к силовым линиям и поэтому не сопровождается дополнительной работой.

§ 24. Точечный заряд над плоской поверхностью диэлектрика

Пусть два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 граничат друг с другом вдоль плоскости MN (рис. 70). В точке A первого диэлектрика помещен точечный заряд q. Найдем электрическое поле в каждом из диэлектриков. В окрестности точки A поле должно стремиться к бесконечности, как кулоново поле точечного заряда q. Поэтому поле в первом диэлектрике должно содержать слагаемое $q\mathbf{r}/(\varepsilon_1 r^3)$. К нему надо добавить поле поляризационных зарядов, возникших на границе раздела диэлектриков. Введем предположение, оправдываемое последующими вычислениями, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещенного в точке A', зеркально симметричной с A относительно границы раздела. Тогда для поля в первом диэлектрике можно написать

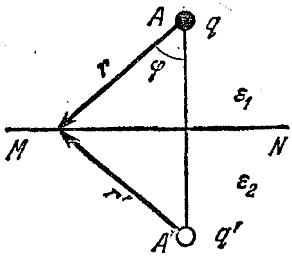

Рис. 70.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\mathbf{r} + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'^3}\mathbf{r}',$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы, проведенные из зарядов q и q' в рассматриваемую точку. Введем второе предположение, также оправдываемое последующими вычислениями, что поле во втором диэлектрике представляется выражением

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r^3}\mathbf{r},$$

причем второй (фиктивный) заряд q'' совмещен пространственно с зарядом q (на рис. 70 он не изображен). Теперь необходимо выражения для E_1 и E_2 «сшить», чтобы на границе раздела диэлектриков удовлетворялись граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора $\mathbf{E}$ и нормальных компонент вектора $\mathbf{D}$. Первое условие имеет вид

$$\frac{q}{\varepsilon_1}\sin\varphi + \frac{q'}{\varepsilon_1}\sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_2}\sin\varphi,$$

а второе —

$$q\cos\varphi - q'\cos\varphi = q''\cos\varphi.$$

Существенно, что угол φ выпадает из обоих уравнений. Поэтому, если q' и q'' определить из этих уравнений, то граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела. Таким путем находим

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\mathbf{r} - \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r'^3}\mathbf{r}',$$
$$\mathbf{E}_2 = \frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}. \tag{24.1}$$

Эти выражения удовлетворяют всем условиям задачи и, в силу теоремы единственности, дают ее решение. При $\varepsilon_2 \to \infty$ они переходят в соответствующие выражения для поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

ЗАДАЧА

Какая сила действует на точечный заряд q вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков?

Ответ. $F = \frac{1}{4\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{q^2}{h^2}$, где h — расстояние заряда от границы раздела. Заряд притягивается к плоскости, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и отталкивается, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

§ 25. Электрическое поле заряженного проводящего эллипсоида

1. Возьмем сферический слой между двумя концентрическими сферами, равномерно заряженный по всему объему. Электрическое поле в полости, ограниченной таким слоем, как известно, равно нулю. Хотя этот результат является непосредственным следствием теоремы Гаусса (см. § 6), для последующего важно получить его непосредственно из закона Кулона. С этой целью через произвольную