оправдываемое последующими вычислениями, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещенного в точке A', зеркально симметричной с A относительно границы раздела. Тогда для поля в первом диэлектрике можно написать

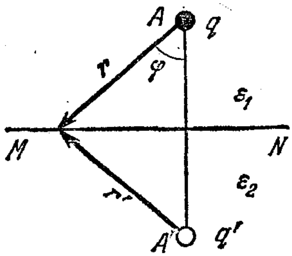

Рис. 70.

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\boldsymbol{r}+\frac{q'}{\varepsilon_1 r'^3}\boldsymbol{r}',$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ — радиусы-векторы, проведенные из зарядов q и q' в рассматриваемую точку. Введем второе предположение, также оправдываемое последующими вычислениями, что поле во втором диэлектрике представляется выражением

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q''}{\varepsilon_2 r^3}\boldsymbol{r},$$

причем второй (фиктивный) заряд q'' совмещен пространственно с зарядом q (на рис. 70 он не изображен). Теперь необходимо выражения для $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ «сшить», чтобы на границе раздела диэлектриков удовлетворялись граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора $\boldsymbol{E}$ и нормальных компонент вектора $\boldsymbol{D}$. Первое условие имеет вид

$$\frac{q}{\varepsilon_1}\sin\varphi+\frac{q'}{\varepsilon_1}\sin\varphi=\frac{q''}{\varepsilon_2}\sin\varphi,$$

а второе —

$$q\cos\varphi-q'\cos\varphi=q''\cos\varphi.$$

Существенно, что угол φ выпадает из обоих уравнений. Поэтому, если q' и q'' определить из этих уравнений, то граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела. Таким путем находим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1&=\frac{q}{\varepsilon_1 r^3}\boldsymbol{r}-\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r'^3}\boldsymbol{r}',\\ \boldsymbol{E}_2&=\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}.\end{aligned}\qquad(24.1)$$

Эти выражения удовлетворяют всем условиям задачи и, в силу теоремы единственности, дают ее решение. При $\varepsilon_2\to\infty$ они переходят в соответствующие выражения для поля точечного заряда над проводящей плоскостью.

ЗАДАЧА

Какая сила действует на точечный заряд q вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков?

Ответ. $F=\frac{1}{4\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{q^2}{h^2}$, где h — расстояние заряда от границы раздела. Заряд притягивается к плоскости, если $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, и отталкивается, если $\varepsilon_2<\varepsilon_1$.

§ 25. Электрическое поле заряженного проводящего эллипсоида

1. Возьмем сферический слой между двумя концентрическими сферами, равномерно заряженный по всему объему. Электрическое поле в полости, ограниченной таким слоем, как известно, равно нулю. Хотя этот результат является непосредственным следствием теоремы Гаусса (см. § 6), для последующего важно получить его непосредственно из закона Кулона. С этой целью через произвольную

точку M (рис. 71) внутри сферической полости, ограниченной рассматриваемым слоем, проведем бесконечно узкий конус прямых. Он вырежет из слоя два бесконечно малых элемента объема dV_1 и dV_2, заштрихованных на рисунке. Проведем далее через точки A, B, A', B' участки сферических поверхностей с общим центром в точке M, изображенные на рисунке пунктирными линиями. Между ними тот же конус прямых вырежет элементы объема $d\tau_1$ и $d\tau_2$ (не обозначенные на рисунке). Очевидно, $d\tau_1/d\tau_2 = r_1^2/r_2^2$, где r_1 и r_2 — расстояния рассматриваемых элементов объема от точки M. Кроме того, $d\tau_1 = dV_1$, $d\tau_2 = dV_2$, а потому $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$, где dq_1 и dq_2 — заряды элементов объема dV_1 и dV_2 соответственно. На основании закона Кулона можно утверждать, что поля зарядов dq_1 и dq_2 в точке M равны и противоположно направлены. Проведя через точку M конусы прямых во всевозможных направлениях, можно разделить весь заряженный сферический слой на пары аналогичных бесконечно малых зарядов, электрические поля которых в точке M взаимно уничтожают друг друга. Отсюда следует, что электрическое поле будет равно нулю во всех точках полости, так как точку M можно взять произвольно.

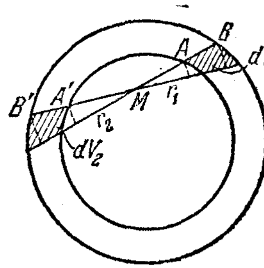

Рис. 71.

2. Предполагая, что электрические заряды в сферическом слое неподвижно закреплены, будем равномерно сжимать или растягивать всю фигуру на рис. 71 последовательно вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. При такой деформации сферический слой перейдет в равномерно заряженный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя подобными и подобно расположенными концентрическими эллипсоидами. Каждая прямая перейдет в прямую, равномерно сжатую или растянутую. Величины зарядов dq_1 и dq_2, разумеется, останутся без изменения. Элементы объема dV_1 и dV_2, а также расстояния r_1 и r_2 изменятся, но их отношения останутся прежними. В частности, $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$. Значит, сохранится и компенсация полей в каждой точке внутри полученной эллипсоидальной полости. Отсюда следует, что *электрическое поле в полости, ограниченной равномерно заряженным эллипсоидальным слоем между двумя подобными и подобно расположенными концентрическими эллипсоидами, равно нулю.*

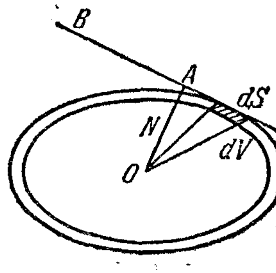

Рис. 72.

3. Будем теперь уменьшать толщину эллипсоидального слоя беспредельно, сохраняя его общий заряд q неизменным. В пределе получится *поверхностное распределение электричества*, при котором поле внутри эллипсоидальной полости всюду равно нулю. Если поверхность полости сделать проводящей, то равновесие электричества на ней не нарушится. Значит, в результате такого предельного перехода получится равновесное распределение электричества по поверхности проводящего эллипсоида. Выполним теперь указанный предельный переход и найдем величину поверхностной плотности электричества σ на поверхности эллипсоида. Проведем из центра эллипсоидального слоя O бесконечно узкий конус прямых, вырезающий из этого слоя объем dV, а из его поверхности — элементарную площадку dS (рис. 72). Очевидно, $dV = dS\,dN$, где dN — толщина слоя в рассматриваемом месте. Если ρ — объемная плотность электричества в слое, то заряд элемента объема dV будет $dq = \rho\,dS\,dN$. Если $dN \to 0$, а общий заряд эллипсоидального слоя сохраняется неизменным, то получается поверхностное распределение электричества с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \rho\,dN.$$

Проведем в рассматриваемом месте эллипсоидальной поверхности касательную плоскость AB и опустим на нее перпендикуляр OA, длину которого обозначим N. При неизменном направлении перпендикуляра OA объемы подобных и подобно расположенных эллипсоидов, очевидно, пропорциональны N^3. Если V — объем эллипсоида, то $V \sim N^3$, а потому

$$\Delta V/V = 3\,dN/N,$$

где ΔV — объем эллипсоидального слоя. Исключив dN и воспользовавшись соотношением $q = \rho\,\Delta V$, получим

$$\sigma = qN/(3V). \tag{25.1}$$

Пусть уравнение поверхности эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{25.2}$$

Тогда, как известно из аналитической геометрии,

$$N = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Кроме того, $V = \frac{4\pi}{3}abc$. Поэтому формула (25.1) переходит в

$$\sigma = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{25.3}$$

Из рассуждений настоящего параграфа непосредственно следует, что *равновесное распределение электричества на поверхности проводящего эллипсоида остается равновесным при любом равномерном растяжении или сжатии его.* Пользуясь этим, можно было бы найти равновесное распределение электричества по поверхности эллипсоида путем равномерного растяжения или сжатия заряженного проводящего шара. Такой путь является наиболее коротким. Разумеется, он также приводит к формуле (25.3).

Зная распределение электричества по поверхности эллипсоида, можно путем интегрирования по этой поверхности найти потенциал, а затем и напряженность электрического поля в любой точке пространства. Такой путь, однако, приводит к громоздким вычислениям. Значительно проще другой, искусственный прием (см. задачи 3 и 4 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Найти поверхностную плотность электричества на бесконечно тонкой проводящей эллиптической пластинке, получающейся равномерным сжатием трехосного эллипсоида в направлении оси Z.

Ответ.

$$\sigma = \frac{q}{4\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}. \tag{25.4}$$

2. Заряженный проводящий эллипсоид мысленно разделен на части равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными к одной из его главных осей. Показать, что, каково бы ни было число таких частей, величины их зарядов будут всегда одинаковы. В частности, если эллипсоид является вытянутым и бесконечно тонким, то электричество распределится по его длине равномерно.

3. Найти условие, при выполнении которого поверхности семейства $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ могут быть эквипотенциальными.

Решение. По условию потенциал φ постоянен, если постоянна функция λ. Значит, он должен быть функцией только λ: $\varphi = \varphi(\lambda)$. Дифференцируя φ по координате x, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\varphi''\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\varphi'\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}.$$

Написав аналогичные соотношения для y и z и складывая их, найдем

$$\Delta\varphi=\varphi''(\operatorname{grad}\lambda)^2+\varphi'\Delta\lambda.$$

С учетом уравнения Лапласа $\Delta\varphi=0$ отсюда следует

$$\frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2}=-\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

Таким образом, чтобы уравнение $\lambda(x, y, z)=\text{const}$ представляло семейство эквипотенциальных поверхностей, необходимо, чтобы левая часть последнего соотношения была функцией только λ:

$$\frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2}=\Phi(\lambda). \tag{25.5}$$

Если функция $\Phi(\lambda)$ известна, то потенциал φ можно найти интегрированием уравнения

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}=-\Phi(\lambda), \tag{25.6}$$

что сводится к выполнению двух квадратур.

4. Найти потенциал электрического поля заряженного проводящего эллипсоида.

Решение. Пусть $\lambda(x, y, z)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{25.7}$$

($a\geqslant b\geqslant c>0$). Уравнение $\lambda(x, y, z)=\text{const}$ представляет семейство софокусных поверхностей второго порядка. При $c^2+\lambda>0$ это есть семейство эллипсоидов; при $b^2+\lambda>0$, $c^2+\lambda<0$ — однополостных гиперболоидов; при $a^2+\lambda>0$, $b^2+\lambda<0$, $c^2+\lambda<0$ — двухполостных гиперболоидов. Во всех случаях уравнение $\lambda(x, y, z)=\text{const}$ может быть семейством эквипотенциальных поверхностей. Для доказательства достаточно убедиться, что выполняется условие (25.5). Введем обозначение

$$F_n=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^n}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^n}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^n}.$$

Тогда дифференцированием (25.7) по x получим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}-F_2\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a^2+\lambda)F_2}.$$

Вторичное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{(a^2+\lambda)F_2}-\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2F_2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{2x}{(a^2+\lambda)F_2^2}\left[\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}-2F_3\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right]=$$
$$=\frac{2}{(a^2+\lambda)F_2}-\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3F_2^2}+\frac{8F_3x^2}{(a^2+\lambda)^2F_2^3}.$$

Написав аналогичные выражения для производных по y и z и складывая их, находим

$$(\operatorname{grad}\lambda)^2=\frac{4}{F_2},$$

$$\Delta\lambda=\frac{2}{F_2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right).$$

Следовательно, условие (25.5) выполняется, причем

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right). \tag{25.8}$$

Задача свелась к интегрированию уравнения

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right). \tag{25.9}$$

Допустим теперь, что все знаменатели в правой части уравнения (25.9) положительны. Тогда эквипотенциальными поверхностями (25.7) будут софокусные эллипсоиды. При $\lambda = 0$ получается эллипсоид (25.2). Таким образом, если потенциал $\varphi(x, y, z)$ найти из уравнения (25.9), то на поверхности эллипсоида (25.2) он обратится в постоянную и, следовательно, будет давать решение рассматриваемой задачи. Интегрируя уравнение (25.9), получаем

$$\varphi'(\lambda)=A\left[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\right]^{-1/2},$$

где A — постоянная интегрирования. Интегрируя вторично и принимая за нуль потенциал бесконечно удаленной точки, находим

$$\varphi(\lambda)=A\int\limits_{\infty}^{\lambda}\left[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\right]^{-1/2}d\lambda.$$

Постоянная A определится из условия, что на больших расстояниях функция φ должна переходить в потенциал точечного заряда $\varphi = q/r$. При больших λ эллипсоид (25.7) переходит в шар радиуса $r=\sqrt{\lambda}$, а предыдущий интеграл — в

$$\varphi(\lambda)=A\int\limits_{\infty}^{\lambda}\lambda^{-3/2}\,d\lambda=-2A\lambda^{-1/2}=-\frac{2A}{r}.$$

Значит,

$$\varphi=\frac{q}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\right]^{-1/2}d\lambda. \tag{25.10}$$

Входящий сюда интеграл является *эллиптическим*. Если эллипсоид является эллипсоидом вращения, то интегрирование выполняется в элементарных функциях. Для *вытянутого эллипсоида вращения* ($b = c$)

$$\varphi=\frac{q}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda}-\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{25.11}$$

Введем обозначения: $A=\sqrt{a^2+\lambda}$, $f=\sqrt{a^2-b^2}$. Величина $2A$ есть *большая ось* эквипотенциального эллипсоида, проходящего через точку наблюдения, а $2f$ — расстояние между *фокусами* рассматриваемого семейства *софокусных эллипсоидов*. Выражение (25.11) можно преобразовать к виду

$$\varphi=\frac{q}{2f}\ln\frac{A+f}{A-f}. \tag{25.11a}$$

Для сплюснутого эллипсоида вращения ($a = b$)

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{\lambda+c^2}}. \tag{25.12}$$

Введем длину малой оси эквипотенциального эллипсоида, проходящего через точку наблюдения: $2B = 2\sqrt{c^2+\lambda}$, а также расстояние между фокусами $2f = 2\sqrt{a^2-c^2}$. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{f} \operatorname{arctg} \frac{f}{B}. \tag{25.12a}$$

5. Бесконечно тонкая диэлектрическая палочка равномерно заряжена электричеством с постоянной линейной плотностью. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля такой палочки будут софокусные эллипсоиды, фокусы которых находятся на ее концах.

6. Бесконечно тонкая диэлектрическая пластинка радиуса a заряжена электричеством с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}},$$

где r — расстояние от центра пластинки. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля пластинки будут софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной линией, расположенной по окружности пластинки.

§ 26. Емкость проводников и конденсаторов

1. Рассмотрим заряженный уединенный проводник, погруженный в неподвижный диэлектрик. Потенциал создаваемого им электрического поля на бесконечности условимся считать равным нулю. Если удвоить заряд проводника, то его потенциал также удвоится. Вообще, между зарядом проводника q и его потенциалом φ существует прямая пропорциональность:

$$q = C\varphi. \tag{26.1}$$

Коэффициент C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и ее распределения в пространстве. Он называется *емкостью уединенного проводника*. Например, для шара радиуса a в однородном диэлектрике $\varphi = q/(\varepsilon a)$, а потому

$$C = \varepsilon a. \tag{26.2}$$

2. Более важным является понятие *емкости конденсатора*. Всякий конденсатор состоит из двух металлических обкладок, отделенных одна от другой слоем диэлектрика. Пусть обкладками конденсатора являются две замкнутые металлические оболочки: наружная и внутренняя, причем внутренняя целиком окружена наружной. Тогда поле между обкладками совершенно не будет зависеть от внешних электрических полей. Заряды на поверхностях обкладок, обращенных одна к другой, по теореме Фарадея, равны по величине и противоположны по знаку. В реальном кон-