Для сплюснутого эллипсоида вращения ($a = b$)

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{\lambda+c^2}}. \qquad (25.12)$$

Введем длину малой оси эквипотенциального эллипсоида, проходящего через точку наблюдения: $2B = 2\sqrt{c^2+\lambda}$, а также расстояние между фокусами $2f = 2\sqrt{a^2-c^2}$. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{f} \operatorname{arctg} \frac{f}{B}. \qquad (25.12а)$$

5. Бесконечно тонкая диэлектрическая палочка равномерно заряжена электричеством с постоянной линейной плотностью. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля такой палочки будут софокусные эллипсоиды, фокусы которых находятся на ее концах.

6. Бесконечно тонкая диэлектрическая пластинка радиуса a заряжена электричеством с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}},$$

где r — расстояние от центра пластинки. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля пластинки будут софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной линией, расположенной по окружности пластинки.

§ 26. Емкость проводников и конденсаторов

1. Рассмотрим заряженный уединенный проводник, погруженный в неподвижный диэлектрик. Потенциал создаваемого им электрического поля на бесконечности условимся считать равным нулю. Если удвоить заряд проводника, то его потенциал также удвоится. Вообще, между зарядом проводника q и его потенциалом φ существует прямая пропорциональность:

$$q = C\varphi. \qquad (26.1)$$

Коэффициент C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и ее распределения в пространстве. Он называется *емкостью уединенного проводника.* Например, для шара радиуса a в однородном диэлектрике $\varphi = q/(\varepsilon a)$, а потому

$$C = \varepsilon a. \qquad (26.2)$$

2. Более важным является понятие *емкости конденсатора.* Всякий конденсатор состоит из двух металлических обкладок, отделенных одна от другой слоем диэлектрика. Пусть обкладками конденсатора являются две замкнутые металлические оболочки: наружная и внутренняя, причем внутренняя целиком окружена наружной. Тогда поле между обкладками совершенно не будет зависеть от внешних электрических полей. Заряды на поверхностях обкладок, обращенных одна к другой, по теореме Фарадея, равны по величине и противоположны по знаку. В реальном кон-

денсаторе, поскольку его обкладки не являются полностью замкнутыми, это верно только приближенно, хотя и с большой точностью. Практическая независимость внутреннего поля конденсатора от внешнего поля здесь достигается тем, что обкладки располагаются очень близко одна от другой. В этом случае заряды будут почти целиком сосредоточены на внутренних поверхностях обкладок, т. е. поверхностях, обращенных друг к другу. Если q — заряд одной из обкладок (для определенности положительной), а $\varphi \equiv (\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между обкладками, то

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{26.3}$$

Постоянная C зависит только от размеров и устройства конденсатора. Она называется *емкостью конденсатора.*

Возьмем два конденсатора. В одном пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, в другом между обкладками — вакуум (такой конденсатор обычно называют *воздушным*, что не вполне точно). В остальных отношениях оба конденсатора тождественны. При одних и тех же зарядах разность потенциалов между обкладками первого конденсатора будет в ε раз меньше, чем между обкладками второго (см. § 22, пункт 3). Следовательно, емкость C конденсатора с диэлектриком будет в ε раз больше емкости C_0 воздушного конденсатора:

$$C = \varepsilon C_0. \tag{26.4}$$

3. Во всякой системе единиц за единицу емкости принимают емкость такого конденсатора, который единичным зарядом заряжается до разности потенциалов, равной единице. В гауссовой и СГСЭ-системах, как это видно из формулы (26.2), единичной емкостью обладает уединенный шарик в вакууме, если радиус его равен 1 см. Размерность емкости в этих системах единиц совпадает с размерностью длины. Поэтому указанная единица емкости называется *сантиметром*. Практической единицей емкости является *фарада*. Фарада есть емкость такого конденсатора, который одним кулоном электричества заряжается до разности потенциалов в один вольт. Очевидно,

$$1\ \text{Ф} = \frac{1\ \text{Кл}}{1\ \text{В}} = \frac{3 \cdot 10^9\ \text{СГСЭ-ед. заряда}}{\frac{1}{300}\ \text{СГСЭ-ед. потенциала}} = 9 \cdot 10^{11}\ \text{см}.$$

Емкостью в одну фараду обладает уединенный шар в вакууме с радиусом $9 \cdot 10^{11}$ см $= 9 \cdot 10^6$ км. Это очень большая емкость. На практике применяется *микрофарада*, равная миллионной доле фарады, а также *пикофарада*, которая в миллион раз меньше микрофарады. Емкостью в одну пикофараду обладает шарик в вакууме, если его радиус равен 0,9 см.

4. Емкость шарового конденсатора. Обкладками конденсатора являются две сферы: внутренняя с радиусом R_1 и внешняя с радиусом R_2 (рис. 73). Разность потенциалов между ними

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon}{1/R_1 - 1/R_2} = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (26.5)$$

Если толщина зазора между обкладками $d = R_2 - R_1$ мала по сравнению с радиусами R_1 и R_2, то площади обкладок почти

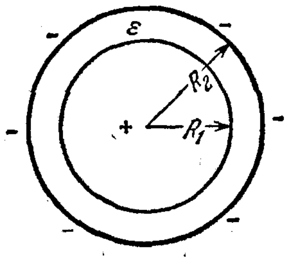

Рис. 73.

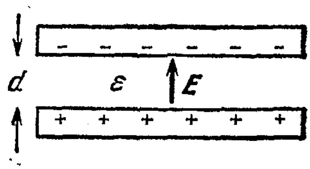

Рис. 74.

одинаковы и приближенно равны $S \approx 4\pi R_1^2 \approx 4\pi R_2^2 \approx 4\pi R_1 R_2$. Тогда

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \qquad (26.6)$$

Эта формула, как и следовало ожидать, совпадает с формулой для емкости плоского конденсатора, которая выводится ниже.

5. Емкость плоского конденсатора. Поле между обкладками конденсатора почти всюду однородно (рис. 74). Однородность поля нарушается только вблизи краев конденсатора. Такими *«краевыми эффектами»* при вычислении емкости конденсатора мы пренебрежем. Это можно делать, когда расстояние d между обкладками очень мало по сравнению с их линейными размерами. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, а S — площадь последней, то $q = \sigma S$. Напряженность поля $E = 4\pi\sigma/\varepsilon$, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = 4\pi\sigma d/\varepsilon$, емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.$$

Краевые эффекты вносят некоторую поправку к этой формуле, но ее вычислением мы заниматься не будем.

Возьмем воздушный конденсатор, состоящий из двух пластин — неподвижной A и подвижной B (рис. 75). Пластину B заземлим, пластину A хорошо изолируем и соединим с шариком электрометра. Зарядим пластину A и будем перемещать пластину B. При увеличении расстояния между пластинами стрелка электрометра отклоняется сильнее, при уменьшении — слабее. Дело в том, что при разведении пластин емкость конденсатора уменьшается. Заряд q пластины A практически не меняется, так как на электрометр переходит пренебрежимо малое количество электричества. Поэтому разность потенциалов $\varphi = q/C$ возрастает, что и показывает электрометр. Наоборот, при сближении пластин емкость возрастает, а разность потенциалов уменьшается.

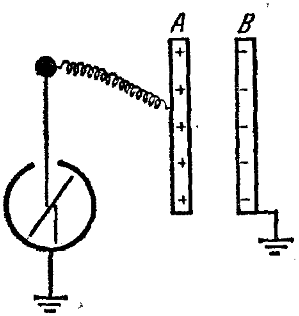

Рис. 75.

Явление можно также объяснить непосредственно с помощью закона Кулона. При соединении заряженной пластины A с электрометром часть заряда уходит с нее на электрометр. Оставшийся заряд удерживается электрическим полем пластины B. Когда B приближается к A, поле возрастает. Благодаря этому часть зарядов с электрометра оттягивается к пластине A, и угол отклонения стрелки уменьшается. Из приведенного объяснения видно, что явление все же обусловлено влиянием краевых эффектов. Напряженность поля между бесконечными пластинами не зависит от расстояния между ними. Но для конечных пластин, в особенности вблизи их краев, это не так. При приближении конечной пластины B на A увеличиваются индукционные заряды противоположного, а на шарике и стрелке электрометра — того же знаков. Такое перемещение зарядов меняет заряд конденсатора и напряженность электрического поля между его пластинами пренебрежимо мало. Но его достаточно, чтобы сильно изменить заряд на электрометре и соответствующую ему разность потенциалов.

Если, оставляя расстояние между пластинами A и B неизменным, ввести между ними лист из диэлектрика, то электрометр покажет меньшую разность потенциалов. Такой опыт был поставлен Фарадеем. На нем Фарадей впервые установил влияние *промежуточной среды* на электрическое поле между наэлектризованными телами. Результат опыта, очевидно, объясняется возрастанием емкости конденсатора при введении диэлектрика между пластинами. Можно также сказать, что на диэлектрике появляются поляризационные заряды, оттягивающие часть электричества с электрометра на пластины конденсатора. Металлический лист в таком опыте действует как диэлектрик с бесконечно большим значением ε. Его введение эквивалентно уменьшению зазора d между пластинами конденсатора.

Опыт можно осуществить в другой постановке (рис. 76). Пластины воздушного конденсатора через баллистический гальванометр подсоединяют к полюсам гальванической батареи, поддерживающей постоянной разность потенциалов между ними. Если между пластинами ввести лист из диэлектрика, то емкость и заряд конденсатора должны возрастать. По цепи пройдет кратковременный электрический ток, и баллистический гальванометр «даст отброс».

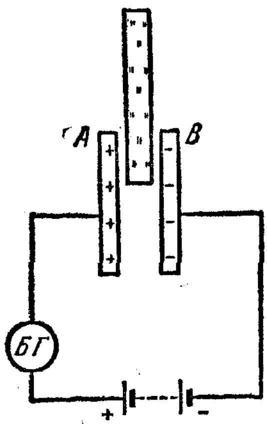

Рис. 76.

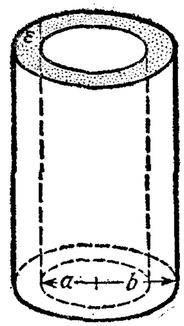

Рис. 77.

6. Емкость цилиндрического конденсатора. Цилиндрический конденсатор состоит из коаксиальных цилиндрических обкладок, разделенных слоем диэлектрика (рис. 77). Примером такого конденсатора может служить лейденская банка. Пусть a и b — радиусы внутренней и наружной обкладок, а l — длина конденсатора. Если пренебречь краевыми эффектами, то

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (b/a)}. \tag{26.7}$$

Когда зазор между обкладками конденсатора $d = b - a$ мал по сравнению с a и b, эта формула, как легко убедиться, переходит в (26.6).

7. Емкость двух параллельных прямых проволок. Пусть l — длина каждой проволоки, a и b — их радиусы, $2h$ — расстояние между ними. Предполагая, что $l \gg 2h \gg a$, $2h \gg b$, можно воспользоваться формулой (19.11) и написать

$$\varphi = -2q \ln r_1/(\varepsilon l) + 2q \ln r_2/(\varepsilon l) + \text{const},$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки наблюдения от осей проволок. Полагая сначала $r_1 = a$, $r_2 = 2h$, а затем $r_1 = 2h$, $r_2 = b$, находим потенциалы проволок φ_1, φ_2 и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. В результате получаем для емкости формулу

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{4h^2}{ab}}. \tag{26.8}$$

В частности, при $a = b$

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \ln (2h/a)}. \tag{26.9}$$

Из последней формулы методом зеркальных изображений легко получить выражение для емкости цилиндрической прямой проволоки, подвешенной над заземленной бесконечной проводящей

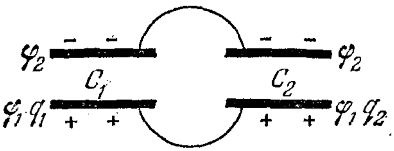

Рис. 78.

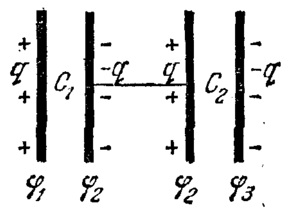

Рис. 79.

плоскостью (телеграфный провод над земной поверхностью). Если проволока параллельна плоскости, а расстояние между ними равно h, то емкость будет

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (2h/a)}, \tag{26.10}$$

т. е. вдвое больше, чем в предыдущем случае.

8. Конденсаторы часто соединяют в батареи. Соединение может быть *параллельным* (рис. 78) или *последовательным* (рис. 79). Применяют также *комбинированное соединение*. Ограничимся ради простоты случаем двух конденсаторов. При параллельном соединении разности потенциалов между обкладками обоих конденсаторов одинаковы, а заряды обкладок складываются: $q = q_1 + q_2$. Делением на общую разность потенциалов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ находим отсюда емкость батареи:

$$C = C_1 + C_2. \tag{26.11}$$

При последовательном соединении средние пластины, соединенные между собой, электризуются через влияние, а потому их заряды равны и противоположны по знаку. Таким образом, заряды на обоих конденсаторах одинаковы. Разности потенциалов складываются:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3).$$

А так как

$$\varphi_1 - \varphi_3 = q/C, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = q/C_1, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = q/C_2,$$

то отсюда получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{26.12}$$

Обобщение формул (26.11) и (26.12) на случай нескольких конденсаторов тривиально. Параллельное соединение применяется для увеличения емкости конденсатора. Последовательное применяют тогда, когда во избежание пробоя большую разность потенциалов требуется распределить между несколькими конденсаторами.

9. Применим формулу (26.12) к расчету емкости *слоистого плоского конденсатора*. Конденсатор состоит из двух параллельных металлических обкладок, разделенных плоскими слоями из диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями (рис. 80). Представим себе, что между слоями диэлектриков введены бесконечно тонкие металлические листы. От этого заряды на обкладках конденсатора и напряженности полей в слоях диэлектрика не изменятся. Не изменится и разность потенциалов между обкладками, а с ней и емкость конденсатора. Однако введение металлических листов превращает слоистый конденсатор в батарею последовательно соединенных конденсаторов. Применяя к ней формулы (26.6) и (26.12), получим

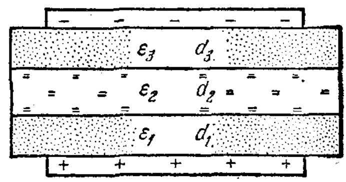

Рис. 80.

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots\right), \tag{26.13}$$

где d_1, d_2, ... — толщины диэлектрических слоев, а ε_1, ε_2, ... — их диэлектрические проницаемости.

ЗАДАЧИ

1. Три конденсатора с емкостями $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 4$ мкФ и допустимыми напряжениями $V_1 = 1000$ В, $V_2 = 450$ В, $V_3 = 250$ В соединены в батарею. При каком соединении конденсаторов можно получить наибольшее напряжение? Чему равно это напряжение и соответствующая емкость батареи?

Ответ. При последовательном; $V = 1125$ В; $C = 0{,}8$ мкФ.

2. Определить емкость единицы длины двух параллельных бесконечно длинных круговых цилиндров, радиусы которых равны a и b, а расстояние между осями l.

Решение. Возьмем две бесконечно длинные параллельные прямые A и A', равномерно заряженные электричествами противоположных знаков (рис. 81).

Эквипотенциальными поверхностями будут круговые цилиндры (см. задачу 9 к § 19). Пусть S и S' — два из них, расположенные вне друг друга. Положение осей цилиндров O и O' определим условиями $OA \cdot OA' = a^2$, $O'A' \cdot O'A = b^2$ (см. § 23, пункт 3). Потенциалы поверхностей S и S' будут

$$\varphi = \frac{2\varkappa}{\varepsilon} \ln \frac{a}{d}, \qquad \varphi' = -\frac{2\varkappa'}{\varepsilon} \ln \frac{b}{d'},$$

где $d = OA$, $d' = O'A'$. Если заряды $\varkappa$ и $\varkappa'$ перейдут с линий A и A' на поверхности цилиндров S и S', то поле внутри цилиндров обратится в нуль, а во внешнем

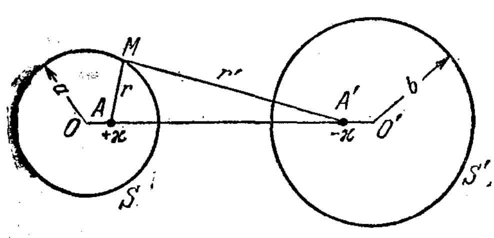

Рис. 81.

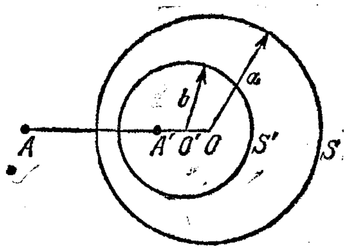

Рис. 82.

пространстве не изменится. Получится распределение зарядов, отвечающее условиям задачи. Вычислив разность потенциалов $\varphi - \varphi'$, найдем емкость на единицу длины

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \ln \dfrac{ab}{dd'}}. \tag{26.14}$$

Для определения d и d' имеем уравнения

$$d\,(l-d') = a^2, \qquad d'\,(l-d) = b^2,$$

из которых находим

$$\begin{aligned} d &= \frac{l^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{(l^2+a^2-b^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l}, \\ d' &= \frac{l^2 + b^2 - a^2 - \sqrt{(l^2+b^2-a^2)^2 - 4b^2l^2}}{2l}. \end{aligned} \tag{26.15}$$

Рассмотрим теперь случай, когда цилиндр S' целиком лежит внутри цилиндра S (рис. 82). Все рассуждения и вычисления в этом случае остаются без изменений. Окончательная формула (26.14) также остается неизменной. Только для определения $d = OA$ и $d' = O'A'$ получаются уравнения

$$d'\,(d-l) = b^2, \qquad d\,(d'+l) = a^2 \qquad (a > b > l).$$

Из них находим

$$\begin{aligned} d &= \frac{a^2 - b^2 - l^2 + \sqrt{(a^2-b^2-l^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l}, \\ d' &= \frac{a^2 - b^2 - l^2 - \sqrt{(a^2-b^2-l^2)^2 - 4b^2l^2}}{2l}. \end{aligned} \tag{26.16}$$

3. Показать, что для тонких цилиндров формула (26.14) переходит в формулу (26.8), а для коаксиальных цилиндров — в формулу (26.7).

4. Найти выражение для емкости эллипсоида.

Ответ.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\infty [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\,d\lambda. \tag{26.17}$$

Для вытянутого эллипсоида вращения:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2ae\varepsilon}\ln\frac{1+e}{1-e}, \tag{26.18}$$

для сплюснутого:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2ae\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{26.19}$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

§ 27. Потенциальные и емкостные коэффициенты

1. Рассмотрим произвольную систему n заряженных неподвижных проводников, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком — однородным или неоднородным. Такую систему иногда называют *сложным конденсатором*. Будем предполагать, что свободных зарядов в диэлектрике нет. Докажем, что при этих условиях потенциалы проводников будут *линейными однородными функциями* их зарядов. При этом, как обычно, потенциал поля в бесконечности принимается равным нулю.

Предположим сначала, что все проводники не заряжены. Сообщим затем одному только i-му проводнику заряд, равный единице. Этим однозначно определится электрическое поле $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ во всем пространстве и соответствующие ему потенциал $V_i(\boldsymbol{r})$ и индукция $\boldsymbol{D}_i=\varepsilon(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$. По теореме Гаусса поток вектора $\boldsymbol{D}_i$ через поверхность i-го проводника будет равен 4π, а через поверхности остальных проводников — нулю. Значение потенциала $V_i(\boldsymbol{r})$ в месте нахождения j-го проводника обозначим V_{ji}. Коэффициенты V_{ji} зависят только от формы и расположения проводников, а также от диэлектрической проницаемости диэлектрика между ними. Они называются *потенциальными коэффициентами*. Ввиду линейности и однородности уравнений электростатики произвольная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r})$ с постоянными коэффициентами q_i, т. е.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{n} q_i\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.1}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{n} q_i\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.2}$$

удовлетворяет этим уравнениям. Действительно, вектор $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ потенциальный, так как все поля $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ потенциальны. В диэлектрике вектор $\boldsymbol{D}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$, так как