4. Найти выражение для емкости эллипсоида.

Ответ.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\infty [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\, d\lambda. \tag{26.17}$$

Для вытянутого эллипсоида вращения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon} \ln \frac{1+e}{1-e}, \tag{26.18}$$

для сплюснутого:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{26.19}$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

§ 27. Потенциальные и емкостные коэффициенты

1. Рассмотрим произвольную систему n заряженных неподвижных проводников, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком — однородным или неоднородным. Такую систему иногда называют *сложным конденсатором*. Будем предполагать, что свободных зарядов в диэлектрике нет. Докажем, что при этих условиях потенциалы проводников будут *линейными однородными функциями* их зарядов. При этом, как обычно, потенциал поля в бесконечности принимается равным нулю.

Предположим сначала, что все проводники не заряжены. Сообщим затем одному только i-му проводнику заряд, равный единице. Этим однозначно определится электрическое поле $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ во всем пространстве и соответствующие ему потенциал $V_i(\boldsymbol{r})$ и индукция $\boldsymbol{D}_i = \varepsilon(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$. По теореме Гаусса поток вектора $\boldsymbol{D}_i$ через поверхность i-го проводника будет равен 4π, а через поверхности остальных проводников — нулю. Значение потенциала $V_i(\boldsymbol{r})$ в месте нахождения j-го проводника обозначим V_{ji}. Коэффициенты V_{ji} зависят только от формы и расположения проводников, а также от диэлектрической проницаемости диэлектрика между ними. Они называются *потенциальными коэффициентами*. Ввиду линейности и однородности уравнений электростатики произвольная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r})$ с постоянными коэффициентами q_i, т. е.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.1}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.2}$$

удовлетворяет этим уравнениям. Действительно, вектор $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ потенциальный, так как все поля $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ потенциальны. В диэлектрике вектор $\boldsymbol{D}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$, так как

$\operatorname{div} \boldsymbol{D}_i = 0$. Наконец, в проводниках $\boldsymbol{E} = 0$. Таким образом, выражения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ могут рассматриваться как напряженность и индукция какого-то электростатического поля. Заряды, возбуждающие такое поле, не могут находиться внутри диэлектрика, так как $4\pi\rho = \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$. Остается выяснить физический смысл постоянных коэффициентов q_i, введенных выше чисто формально. Для этого замечаем, что заряд на поверхности i-го проводника согласно теореме Гаусса равен

$$Q_i = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j q_j \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}_j\, d\boldsymbol{S}) = \frac{q_i}{4\pi} \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}_i\, d\boldsymbol{S}) = q_i.$$

На основании теоремы единственности можно поэтому сказать, что выражение (27.1) определяет электростатическое поле системы n проводников, заряды которых равны соответственно $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Потенциал поля (27.1) определяется выражением

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{n} q_j V_j(\boldsymbol{r}). \tag{27.3}$$

Поместив точку $\boldsymbol{r}$ на поверхности i-го проводника, находим его потенциал:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j. \tag{27.4}$$

Разрешив эти уравнения относительно q_i, получим

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_j. \tag{27.5}$$

Постоянные C_{ij} называются *емкостными коэффициентами* [1]). Как и потенциальные коэффициенты, они определяются только величиной, формой и расположением проводников, а также диэлектрической проницаемостью промежуточной среды. В § 28 будет доказано, что емкостные, а следовательно, и потенциальные коэффициенты симметричны, т. е. $C_{ij} = C_{ji}$, $V_{ij} = V_{ji}$.

Таким образом, *заряды проводников являются линейными однородными функциями их потенциалов, а потенциалы — линейными однородными функциями зарядов.*

Если диэлектрик между проводниками однороден, то все емкостные коэффициенты C_{ik} будут пропорциональны его диэлектрической проницаемости ε.

Для конденсатора число проводников (обкладок) равно двум. В этом случае

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \qquad q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2,$$

[1]) В старой литературе коэффициенты C_{ij} назывались *коэффициентами емкости*, когда $i = j$, и *коэффициентами индукции*, когда $i \neq j$. Мы не следуем этой терминологии.

причем $q_2 = -q_1$. Решив эти уравнения относительно φ_1 и φ_2, найдем разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и емкость конденсатора:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}. \tag{27.6}$$

2. Отметим некоторые свойства потенциальных и емкостных коэффициентов. Мы не будем приводить их строгие математические доказательства, а ограничимся интуитивными, но достаточно убедительными физическими соображениями.

Все потенциальные коэффициенты V_{ij} положительны. Действительно, если j-му проводнику сообщить положительный заряд q, а остальные проводники оставить незаряженными, то интуитивно ясно, что потенциал во всех точках пространства будет положителен. При этом $\varphi_i = V_{ij}q$. Из положительности φ_i следует $V_{ij} > 0$.

Интуитивно также ясно, что максимальным будет потенциал проводника, которому сообщен заряд, т. е. $\varphi_j > \varphi_i$. Отсюда следует, что $V_{jj} > V_{ij}$ $(i \neq j)$.

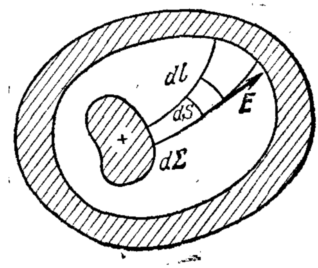

Рис. 83.

Емкостные коэффициенты C_{ij} с одинаковыми индексами положительны, а с разными — отрицательны. Действительно, заземлим все проводники, за исключением i-го. Тогда $q_i = C_{ii}\varphi_i$. Величины q_i и φ_i будут иметь одинаковые знаки, а потому должно быть $C_{ii} > 0$. Теперь заземлим все проводники, за исключением i-го и j-го, i-му проводнику сообщим положительный заряд q_i, а j-й проводник оставим незаряженным. Тогда потенциалы φ_i и φ_j будут положительны, причем $q_j = 0 = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j = 0$. Это равенство может соблюдаться только при условии $C_{ji} < 0$.

Покажем, наконец, что $\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij} \geqslant 0$. Для этого предположим, что i-й проводник, которому сообщен положительный заряд q_i, окружен со всех сторон заземленной замкнутой проводящей оболочкой произвольной формы (рис. 83). По теореме Фарадея на оболочке индуцируется отрицательный заряд $q' = -q_i$. Удалим в бесконечность некоторые части оболочки, чтобы из оставшихся частей образовалось $n-1$ заземленных проводников с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n$. Сумма этих зарядов по абсолютной величине будет меньше q_i. С учетом знаков можно написать $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j \geqslant 0$. Подставив сюда $q_j = C_{ji}\varphi_i$ и приняв во внимание, что $\varphi_i > 0$, получим требуемый результат.

ЗАДАЧИ

1. К положительно заряженному уединенному проводнику подносится незаряженный изолированный проводник. Показать, что при этом потенциалы обоих проводников будут увеличиваться, а разность потенциалов между ними — уменьшаться. Рассмотреть также случай, когда первый проводник был заряжен отрицательно.

2. Проводник заряжается от электрофора путем повторяющихся поднесений к пластинке, которая после каждого поднесения снова заряжается от того же электрофора до заряда Q. Пусть q_1 — заряд на проводнике после первой операции. Определить заряд q на проводнике после очень большого числа операций.

Р е ш е н и е. При поднесении проводника к пластинке общий заряд в определенном отношении распределяется между этими телами. При первом поднесении проводник получает заряд q_1, на пластинке остается $Q - q_1$. Если операция зарядки повторена *многократно*, то при последующих соприкосновениях проводника с пластинкой его заряд практически уже меняться не будет. Заряд пластинки также не будет меняться и будет равен Q, поскольку пластинка заряжается от электрофора. Искомый заряд q определится из пропорции

$$\frac{q}{Q} = \frac{q_1}{Q - q_1}.$$

3. Три одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряд на третьем шаре q_3.

Решение. В силу симметрии имеем $V_{11} = V_{22} = V_{33} = A$, $V_{12} = V_{21} = V_{23} = B$. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1 = Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. Аналогично для третьего шара: $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Таким образом,

$$Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2).$$

Отсюда

$$q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}.$$

4. Четыре одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах правильного тетраэдра. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряды на двух остальных шарах.

Ответ. $q_3 = q_2^2/q_1$, $q_4 = q_2^3/q_1^2$.

§ 28. Электрическая энергия

1. Электрическая энергия, как и всякая другая энергия, зависит только от *состояния системы*, но не зависит от способа, каким система была приведена в это состояние. Вычислим сначала электрическую энергию заряженного конденсатора. Она однозначно определяется зарядами его обкладок или разностью потенциалов между ними. Способ зарядки на величину энергии не влияет. Применим такой способ зарядки, чтобы вычисления были максимально просты. Если конденсатор не заряжен, то на каждой из его обкладок имеется смесь одинаковых количеств положительного и отрицательного электричеств. Будем переносить положительное электричество бесконечно малыми порциями dq с отрицательной обкладки на положительную. Для переноса заряда dq необходимо совершить работу против электрического поля:

$$\delta A^{\text{внеш}} = \varphi\, dq,$$

где φ — мгновенное значение разности потенциалов между обкладками. Работа самого конденсатора будет такой же по величине,