проводник получает заряд q_1, на пластинке остается $Q - q_1$. Если операция зарядки повторена *многократно*, то при последующих соприкосновениях проводника с пластинкой его заряд практически уже меняться не будет. Заряд пластинки также не будет меняться и будет равен Q, поскольку пластинка заряжается от электрофора. Искомый заряд q определится из пропорции

$$\frac{q}{Q} = \frac{q_1}{Q - q_1}.$$

3. Три одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряд на третьем шаре q_3.

Решение. В силу симметрии имеем $V_{11} = V_{22} = V_{33} = A$, $V_{12} = V_{21} = V_{23} = B$. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1 = Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. Аналогично для третьего шара: $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Таким образом,

$$Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2).$$

Отсюда

$$q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}.$$

4. Четыре одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах правильного тетраэдра. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряды на двух остальных шарах.

Ответ. $q_3 = q_2^2/q_1$, $q_4 = q_2^3/q_1^2$.

§ 28. Электрическая энергия

1. Электрическая энергия, как и всякая другая энергия, зависит только от *состояния системы*, но не зависит от способа, каким система была приведена в это состояние. Вычислим сначала электрическую энергию заряженного конденсатора. Она однозначно определяется зарядами его обкладок или разностью потенциалов между ними. Способ зарядки на величину энергии не влияет. Применим такой способ зарядки, чтобы вычисления были максимально просты. Если конденсатор не заряжен, то на каждой из его обкладок имеется смесь одинаковых количеств положительного и отрицательного электричеств. Будем переносить положительное электричество бесконечно малыми порциями dq с отрицательной обкладки на положительную. Для переноса заряда dq необходимо совершить работу против электрического поля:

$$\delta A^{\text{внеш}} = \varphi\, dq,$$

где φ — мгновенное значение разности потенциалов между обкладками. Работа самого конденсатора будет такой же по величине, но противоположной по знаку;

$$\delta A = -\varphi\, dq. \tag{28.1}$$

Зарядка конденсатора может сопровождаться выделением или поглощением тепла, а также изменением плотности диэлектрика. Однако в большинстве случаев эти эффекты незначительны, и мы временно оставим их без внимания. Тогда работа $\delta A^{\text{внеш}}$ целиком пойдет на увеличение электрической энергии конденсатора W, т. е.

$$dW = \varphi\, dq = \frac{q\, dq}{C}. \tag{28.2}$$

Если, как мы предположили, температура и плотность диэлектрика при зарядке не изменяются, то не будет изменяться также диэлектрическая проницаемость ε, а с ней и емкость конденсатора C. Поэтому интегрированием предыдущего выражения находим

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2. \tag{28.3}$$

2. Проведем теперь вычисление электрической энергии в общем виде. Рассмотрим несколько тел с зарядами q_1, q_2, ... и потенциалами φ_1, φ_2, ..., пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком (однородным или неоднородным). Под $q_1, q_2, \ldots$ здесь следует понимать только *свободные*, а не поляризационные заряды. Тела, на которых они находятся, могут быть как проводниками, так и диэлектриками. Проводники могут быть любых размеров. Размеры диэлектрических тел должны быть настолько малы, чтобы потенциал каждого тела мог с достаточной точностью считаться одинаковым во всех его точках. Этого всегда можно достигнуть, мысленно разделяя диэлектрик на достаточно малые части и считая каждую из них за отдельное диэлектрическое тело. Примем за начальное такое состояние, в котором все тела не заряжены. Будем переносить электричество из бесконечности на эти тела бесконечно малыми порциями. Рассуждая так же, как в случае конденсатора, найдем

$$W = \int \sum_i \varphi_i'\, dq_i',$$

где суммирование ведется по всем заряженным телам. Штрихи над φ_i и q_i поставлены для того, чтобы указать, что эти величины *переменные*, т. е. меняются во время зарядки. Интеграл легко вычислить, используя то обстоятельство, что его значение *не зависит от способа зарядки*. Пусть q_i и φ_i — заряд и потенциал i-го тела в конечном состоянии. Осуществим зарядку так, чтобы в любой момент времени переменные заряды q_i' были пропорциональны их конечным значениям q_i:

$$q_i' = kq_i,$$

где k — переменная величина, одинаковая для всех зарядов q_i. Во время зарядки она возрастает от начального значения $k = 0$ до конечного $k = 1$. Поскольку связь между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ предполагается линейной ($\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$), увеличение всех зарядов в несколько раз ведет к увеличению всех потенциалов в такое же число раз. На этом основании можно написать

$$\varphi_i' = k\varphi_i.$$

Единственной переменной, определяющей при зарядке мгновенные значения зарядов и потенциалов, стала величина k. Ее мы и примем за переменную интегрирования. Очевидно, $dq_i' = q_i dk$, и, следовательно,

$$W = \sum \varphi_i q_i \int_0^1 k\,dk.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i q_i. \tag{28.4}$$

Ограничение, касающееся размеров диэлектриков, введенное при получении формулы (28.4), можно снять, если записать эту формулу в виде

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2} \int \varphi\sigma\,dS, \tag{28.5}$$

где ρ — объемная, а σ — поверхностная плотности (свободного) электричества. В таком виде формула справедлива при *любом* распределении проводящих и диэлектрических сред в пространстве. Интегрирование должно проводиться по всем свободным зарядам.

3. Рассмотрим теперь специально случай, когда все заряды *находятся на проводниках. Тогда выражение для W надо взять в виде* (28.4). Размеры проводников и их распределение в пространстве могут быть какими угодно. В частном случае конденсатора число проводников равно двум, а их заряды равны и противоположны по знаку. В этом случае формула (28.4) переходит в (28.3). Пусть теперь число проводников произвольно. Если заряды на проводниках получат бесконечно малые приращения δq_i, то изменятся и потенциалы φ_i. Электрическая энергия изменится на

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i \delta q_i + \frac{1}{2} \sum q_i \delta\varphi_i.$$

Но та же величина равна $\delta A^{\text{внеш}} = \sum \varphi_i\,\delta q_i$. Приравнивая оба выражения, находим

$$\sum \varphi_i\,\delta q_i = \sum q_i\,\delta\varphi_i. \tag{28.6}$$

С помощью этого соотношения легко доказать симметрию емкостных и потенциальных коэффициентов C_{ij} и V_{ij}. Для упрощения доказательства допустим, что заряженными являются только i-й и j-й проводники, причем потенциал φ_j поддерживается постоянным. Тогда

$$\varphi_i\,\delta q_i+\varphi_j\,\delta q_j=q_i\,\delta\varphi_i. \tag{28.6a}$$

Далее,

$$q_i=C_{ii}\varphi_i+C_{ij}\varphi_j,\qquad q_j=C_{ji}\varphi_i+C_{jj}\varphi_j.$$

Ввиду постоянства φ_j

$$\delta q_i=C_{ii}\,\delta\varphi_i,\qquad \delta q_j=C_{ji}\,\delta\varphi_i.$$

Подставляя эти значения в соотношение (28.6а), получим

$$C_{ij}=C_{ji}. \tag{28.7}$$

Отсюда следует также, что $V_{ij}=V_{ji}$. Этот результат можно, конечно, получить непосредственно из соотношения (28.6).

4. Учтем теперь, что поляризация диэлектрика, возникающая при возбуждении в нем электрического поля, может сопровождаться *изменением температуры* диэлектрика и появлением в нем *механических сил* и *упругих напряжений*. Вследствие этого во время зарядки тел диэлектрическая проницаемость ε может измениться, поскольку она зависит от температуры и плотности диэлектрика. Это обстоятельство не сказывается на выражении для элементарной работы (28.1). Но последующее интегрирование этого выражения было проведено в предположении *постоянства* ε. Ясно, что таким путем нельзя получить выражение для внутренней электрической энергии системы. Однако выражения (28.3) — (28.5) определяют не менее важную физическую величину, а именно *свободную энергию системы*, точнее, ту часть ее, которая связана с электризацией тел. Чтобы показать это, переведем систему в конечное состояние в два этапа. Сначала в отсутствие электрического поля деформируем все тела и подведем к ним такое количество тепла, чтобы получилось то же распределение температуры и плотности, что и в конечном состоянии. Приращение свободной энергии в таком процессе обозначим $\Psi_{\text{упр}}$. Оно, очевидно, от электрического поля не зависит. Затем бесконечно малыми порциями будем подводить к телам системы электричество, сохраняя неизменными температуру и плотность в каждой точке пространства. Диэлектрическая проницаемость среды изменяться не будет. Следовательно, на этом этапе применим способ вычисления работы, которым мы пользовались при выводе формул (28.3) и (28.5). Но, как известно из термодинамики, внешняя работа при изотермическом квазистатическом процессе идет на приращение свободной энергии системы. Значит, приращение свободной энергии на втором этапе процесса будет $\Psi_{\text{эл}}=W$. Если свободную энергию в начальном состоянии

принять за нуль, то для полной свободной энергии системы в конечном состоянии можно написать

$$\Psi = \Psi_{упр} + W. \tag{28.8}$$

Первое слагаемое в правой части дает *упругую* часть свободной энергии, второе — *электрическую.*

§ 29. Локализация электрической энергии в пространстве

1. Формулы (28.3) и (28.5) выражают электрическую энергию через *заряды* и *потенциалы.* Но ее можно выразить также через *напряженность* и *индукцию электрического поля.* Сделаем это сначала для случая плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком. Искажениями электрического поля у краев конденсатора (краевыми эффектами) пренебрежем. Если l — расстояние между обкладками, то $\varphi = El$. Кроме того, $q = \sigma S = SD_n/4\pi$, и, следовательно, $dq = S\,dD_n/4\pi$. Подставляя эти выражения в формулы (28.1) и (28.2), получим

$$\delta A = -\frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.1}$$

$$W = V\int\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.2}$$

где $V = Sl$ — объем конденсатора. Если справедливо соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, то интегрирование легко выполняется и дает

$$W = \frac{V}{8\pi}\varepsilon E^2 = \frac{V}{8\pi}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}) = \frac{V}{8\pi\varepsilon}D^2. \tag{29.3}$$

2. Выполним теперь аналогичное преобразование для конденсатора более общей формы (см. рис. 83). Разделим поверхность положительной обкладки на элементарные площадки $d\Sigma$ и через их границы проведем силовые линии. Пространство между обкладками разобьется на силовые трубки, одна из которых изображена на рис. 83. Заряд на положительной обкладке представляется интегралом $q = \int\sigma\,d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int D_n\,d\Sigma$, взятым по ее поверхности. Внутри трубки электрических зарядов нет. Поэтому поток вектора $\boldsymbol{D}$ через поперечное сечение трубки сохраняет свое значение по всей ее длине. Взяв сечение dS в произвольном месте, можем написать $D_n d\Sigma = D_l dS$, где D_l — проекция вектора $\boldsymbol{D}$ на направление силовой линии в том же месте. Представив далее разность потенциалов между обкладками интегралом вдоль силовой линии, преобразуем выражение (28.3) к виду

$$W = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}\int E\,dl\cdot\frac{1}{4\pi}\int D_l\,dS.$$