принять за нуль, то для полной свободной энергии системы в конечном состоянии можно написать

$$\Psi = \Psi_{\text{упр}} + W. \tag{28.8}$$

Первое слагаемое в правой части дает *упругую* часть свободной энергии, второе — *электрическую*.

§ 29. Локализация электрической энергии в пространстве

1. Формулы (28.3) и (28.5) выражают электрическую энергию через *заряды* и *потенциалы*. Но ее можно выразить также через *напряженность* и *индукцию электрического поля*. Сделаем это сначала для случая плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком. Искажениями электрического поля у краев конденсатора (краевыми эффектами) пренебрежем. Если l — расстояние между обкладками, то $\varphi = El$. Кроме того, $q = \sigma S = SD_n/4\pi$, и, следовательно, $dq = S\,dD_n/4\pi$. Подставляя эти выражения в формулы (28.1) и (28.2), получим

$$\delta A = -\frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.1}$$

$$W = V\int\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.2}$$

где $V = Sl$ — объем конденсатора. Если справедливо соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, то интегрирование легко выполняется и дает

$$W = \frac{V}{8\pi}\varepsilon E^2 = \frac{V}{8\pi}(\boldsymbol{ED}) = \frac{V}{8\pi\varepsilon}D^2. \tag{29.3}$$

2. Выполним теперь аналогичное преобразование для конденсатора более общей формы (см. рис. 83). Разделим поверхность положительной обкладки на элементарные площадки $d\Sigma$ и через их границы проведем силовые линии. Пространство между обкладками разобьется на силовые трубки, одна из которых изображена на рис. 83. Заряд на положительной обкладке представляется интегралом $q = \int\sigma\,d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int D_n\,d\Sigma$, взятым по ее поверхности. Внутри трубки электрических зарядов нет. Поэтому поток вектора $\boldsymbol{D}$ через поперечное сечение трубки сохраняет свое значение по всей ее длине. Взяв сечение dS в произвольном месте, можем написать $D_n d\Sigma = D_l dS$, где D_l — проекция вектора $\boldsymbol{D}$ на направление силовой линии в том же месте. Представив далее разность потенциалов между обкладками интегралом вдоль силовой линии, преобразуем выражение (28.3) к виду

$$W = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}\int E\,dl\cdot\frac{1}{4\pi}\int D_l\,dS.$$

Так как $dl\,dS = dV$, то этот интеграл сводится к объемному

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{ED})\,dV = \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,dV \qquad (29.4)$$

и берется по всему объему между обкладками конденсатора.

3. Приведенное доказательство формулы (29.4) проведено в предположении, что в диэлектриках нет свободных зарядов. Общее доказательство можно получить с помощью математической формулы Гаусса — Остроградского (8.3). Предположим сначала, что поверхностных зарядов в пространстве нет. Тогда векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ будут непрерывными и их можно дифференцировать. Подставляя в формулу (29.4) $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и воспользовавшись тождеством $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\operatorname{grad}\varphi$, а также теоремой Гаусса (13.5), получим

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D})\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству. Первый интеграл в правой части равен нулю. Чтобы убедиться в этом, окружим все заряженные тела удаленной сферой S. Пусть V означает объем, ограниченный этой сферой. По формуле Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_V \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D})\,dV = \oint\limits_S \varphi\,(\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{S}).$$

Если радиус r сферы S достаточно велик, а суммарный заряд, окружаемый ею, остается конечным, то этот заряд при вычислении поля на поверхности S можно считать точечным. Его потенциал убывает обратно пропорционально первой, а индукция $\boldsymbol{D}$ — второй степени радиуса r. Если суммарный заряд равен нулю, то убывание происходит еще быстрее. Во всяком случае произведение $\varphi\boldsymbol{D}$ убывает с расстоянием r не медленнее, чем r^{-3}. Поверхность сферы S возрастает более медленно — пропорционально r^2. Ясно, что интеграл по сфере S, а с ним и интеграл по объему V в пределе $r \to \infty$ обращаются в нуль, что и требовалось доказать. Итак,

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV.$$

Введя элемент заряда $dq = \rho\,dV$, полученное соотношение можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\,dq. \qquad (29.5)$$

После этого отпадает необходимость в особом исследовании поверхностных зарядов. Достаточно заметить, что заряженную поверхность можно рассматривать как предельный случай тонкого слоя, заряженного по объему. К такому слою выражение (29.5) применимо. Разделив элементы заряда dq на объемные $\rho\,dV$ и поверхностные $\sigma\,dS$, получим

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\,dS, \qquad (29.6)$$

т. е. формулу (28.5).

4. Итак, формулы (29.6) и (29.4) эквивалентны. Формула (29.6) выражает энергию W через *заряды* и *потенциалы* тел. В этом отношении она соответствует духу *теории действия на расстоянии*. Величина W интерпретируется как *потенциальная энергия электри-*

чески заряженных тел, притягивающихся или отталкивающихся друг от друга. Напротив, формула (29.4) соответствует представлениям *теории поля*: электрическая энергия выражена через *напряженность* и *индукцию электрического поля в диэлектрике.* Такое выражение наводит на мысль, что *электрическая энергия, подобно веществу, распределена в пространстве с объемной плотностью*

$$w = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{ED}) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \tag{29.7}$$

или

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}. \tag{29.8}$$

Последнее выражение обладает большей общностью, чем формула (29.7). При его выводе не использовалось соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$. Предполагалось только, что вектор $\boldsymbol{D}$ является однозначной функцией $\boldsymbol{E}$. Вид самой функции не играет роли.

Какому же из этих двух представлений о локализации электрической энергии следует отдать предпочтение? В рамках электростатики *принципиально невозможно* указать ни одного опыта, который позволил бы сделать выбор между ними. Дело в том, что в электростатике электрическое поле неотделимо от зарядов, являющихся его источниками. Величиной и расположением зарядов *однозначно* определяется электростатическое поле. Обратно, заданием поля во всем пространстве *также однозначно* определяется плотность электрических зарядов. Не так обстоит дело в случае переменных полей. Переменные электромагнитные поля могут существовать *самостоятельно, независимо от возбудивших их электрических зарядов.* Заряды могут нейтрализоваться, а поле, которое они возбудили, может продолжать существовать в виде электромагнитных волн, которым присущ определенный запас энергии. Эта энергия не может быть представлена как потенциальная энергия зарядов, взаимодействующих на расстоянии, поскольку самих зарядов уже нет. Формула (29.6) теряет смысл. Но формула (29.4), а также выражения (29.7) и (29.8) сохраняют смысл и для переменных электромагнитных полей. Представляют ли они в этом случае электрическую энергию и ее плотность — этот вопрос требует особого исследования. Во всяком случае нельзя выдвинуть каких-либо возражений против возможности представления электромагнитной энергии через напряженности электрического и магнитного полей. Сомнения могут относиться только к конкретным формулам, с помощью которых производится такое представление. Следовательно, если электростатику рассматривать как предельный случай электродинамики, то *даже в электростатике* следует отдать предпочтение теории поля с ее представлением о локализации электрической энергии в пространстве.

5. Заметим в заключение, что математическая эквивалентность выражений (29.4) и (29.6) для статических полей может быть использована для доказательства *единственности* решения электростатической задачи, сформулированной в пункте 1 § 22. Действительно, предположим, что задача допускает несколько решений. Возьмем два из них: 1) $\boldsymbol{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1$, $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon\boldsymbol{E}_1$; 2) $\boldsymbol{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2$, $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon\boldsymbol{E}_2$. По теореме Гаусса $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = 4\pi\rho_1$, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_2 = 4\pi\rho_2$, причем $\rho_1 = \rho_2$, так как по условию задачи плотность свободного электричества в диэлектрике задана. Таким образом, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = \operatorname{div}\boldsymbol{D}_2$. Рассмотрим теперь разность обоих решений: $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2$, $\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$. Очевидно, $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, т. е. векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ удовлетворяют уравнениям электростатики, а потому представляют какое-то электростатическое поле. Ввиду эквивалентности формул (29.4), (29.6) можно написать

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, dV = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\, dS.$$

Первый интеграл справа равен нулю, так как $\rho = 0$. Поверхностный интеграл достаточно взять только по поверхностям проводников, так как на всякой поверхности, проходящей в диэлектрике, $\sigma \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Поскольку потенциал каждого проводника $\varphi^{(i)}$ постоянен, то поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\int \varphi\sigma\, dS = \sum_i \varphi^{(i)} \oint\limits_{S^{(i)}} \sigma\, dS = \sum \varphi^{(i)} q^{(i)},$$

где $q^{(i)} \equiv q_1^{(i)} - q_2^{(i)}$ — полный заряд i-го проводника. Если задан потенциал i-го проводника, то $\varphi^{(i)} = 0$, а если задан его заряд, то $q^{(i)} = 0$. В обоих случаях $\varphi^{(i)} q^{(i)} = 0$. Таким образом,

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, dV = 0.$$

Ввиду положительности ε отсюда следует, что $E^2 = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = 0$, что и доказывает единственность решения электростатической задачи.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить электрическую энергию шара радиуса a в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

Ответ.

$$W = q^2/(2a). \tag{29.9}$$

2. То же для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

Ответ.

$$W = 3q^2/(5a). \tag{29.10}$$

§ 30. Взаимная энергия точечных зарядов

1. Пусть точечные заряды q_1 и q_2 находятся в вакууме на бесконечном расстоянии друг от друга. Чтобы их сблизить до расстояния r_{12}, надо затратить работу $q_1 q_2/r_{12}$. Потенциальная энергия взаимодействия зарядов будет

$$U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \tag{30.1}$$