5. Заметим в заключение, что математическая эквивалентность выражений (29.4) и (29.6) для статических полей может быть использована для доказательства *единственности* решения электростатической задачи, сформулированной в пункте 1 § 22. Действительно, предположим, что задача допускает несколько решений. Возьмем два из них: 1) $\boldsymbol{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1$, $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon\boldsymbol{E}_1$; 2) $\boldsymbol{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2$, $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon\boldsymbol{E}_2$. По теореме Гаусса $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = 4\pi\rho_1$, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_2 = 4\pi\rho_2$, причем $\rho_1 = \rho_2$, так как по условию задачи плотность свободного электричества в диэлектрике задана. Таким образом, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = \operatorname{div}\boldsymbol{D}_2$. Рассмотрим теперь разность обоих решений: $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2$, $\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$. Очевидно, $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, т. е. векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ удовлетворяют уравнениям электростатики, а потому представляют какое-то электростатическое поле. Ввиду эквивалентности формул (29.4), (29.6) можно написать

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,dV = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\,dS.$$

Первый интеграл справа равен нулю, так как $\rho = 0$. Поверхностный интеграл достаточно взять только по поверхностям проводников, так как на всякой поверхности, проходящей в диэлектрике, $\sigma \equiv \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Поскольку потенциал каждого проводника $\varphi^{(i)}$ постоянен, то поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\int \varphi\sigma\,dS = \sum_i \varphi^{(i)} \oint_{S^{(i)}} \sigma\,dS = \sum \varphi^{(i)} q^{(i)},$$

где $q^{(i)} \equiv q_1^{(i)} - q_2^{(i)}$ — полный заряд i-го проводника. Если задан потенциал i-го проводника, то $\varphi^{(i)} = 0$, а если задан его заряд, то $q^{(i)} = 0$. В обоих случаях $\varphi^{(i)} q^{(i)} = 0$. Таким образом,

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,dV = 0.$$

Ввиду положительности ε отсюда следует, что $E^2 = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = 0$, что и доказывает единственность решения электростатической задачи.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить электрическую энергию шара радиуса a в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

Ответ.

$$W = q^2/(2a). \tag{29.9}$$

2. То же для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

Ответ.

$$W = 3q^2/(5a). \tag{29.10}$$

§ 30. Взаимная энергия точечных зарядов

1. Пусть точечные заряды q_1 и q_2 находятся в вакууме на бесконечном расстоянии друг от друга. Чтобы их сблизить до расстояния r_{12}, надо затратить работу $q_1 q_2 / r_{12}$. Потенциальная энергия взаимодействия зарядов будет

$$U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \tag{30.1}$$

Для нескольких точечных зарядов

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\sum\frac{q_iq_k}{r_{ik}}. \qquad (30.2)$$

Коэффициент 1/2 поставлен потому, что при суммировании потенциальная энергия каждой пары зарядов учитывается дважды: в виде слагаемого q_iq_k/r_{ik} и в виде равного ему слагаемого q_kq_i/r_{ki}. Формулу (30.2) можно представить в виде

$$U=\frac{1}{2}\sum\varphi_iq_i, \qquad (30.3)$$

где φ_i — потенциал в точке нахождения i-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами:

$$\varphi_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_k}{r_{ik}}. \qquad (30.4)$$

2. По внешнему виду формула (30.3) совпадает с аналогичной формулой (28.4) для электрической энергии заряженных проводников. На самом деле между обеими формулами имеется глубокое различие. Это видно уже из того, что выражение (28.4) может быть преобразовано в объемный интеграл (29.4), который всегда положителен. Выражение (30.3) не допускает такого преобразования, так как оно может быть и положительным и отрицательным. Например, оно отрицательно для двух точечных зарядов противоположных знаков. Каждый заряд q_i, взятый в отдельности, обладает электрической энергией. Она называется *собственной энергией* заряда q_i и представляет собой энергию взаимного отталкивания бесконечно малых частей, на которые его можно мысленно разбить. Эта энергия учитывалась при выводе формулы (28.4), но не учитывалась при выводе формулы (30.3). При получении формулы (30.3) каждый заряд q_i рассматривался как нечто целое и неизменное. Учитывалась только работа, затрачиваемая на *сближение* таких неизменных зарядов, но не на их *образование.* Напротив, при выводе формулы (28.4) учитывалась также работа, затрачиваемая на *образование* зарядов q_i путем конденсации их из бесконечно малых порций электричества, переносимых из бесконечности. В соответствии с этим формула (28.4) определяет *полную электрическую энергию системы зарядов*, а формула (30.3) — только их *взаимную потенциальную энергию*. В формуле (28.4) φ_i означает потенциал проводника, создаваемый всеми зарядами, а в формуле (30.3) — всеми зарядами, за исключением i-го.

3. Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим два бесконечно малых шарика неизменных размеров. Пусть сначала шарики не заряжены, бесконечно далеко находятся друг от друга, а электричество распределено по всему бесконечному пространству с беско-

нечно малой плотностью. Соберем все электричество на шариках. Так как расстояние между ними бесконечно велико, то они не будут оказывать никакого влияния друг на друга. Вся работа пойдет на увеличение собственных энергий шариков. Эти энергии будут равны соответственно

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV, \qquad W_2 = \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV.$$

Затем заряженные шарики сблизим, для чего потребуется совершить работу $U = q_1 q_2 / r_{12}$ (расстояние между шариками r_{12} должно быть очень велико по сравнению с их размерами). Полная электрическая энергия шариков будет

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E_1^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int E_2^2\,dV + U.$$

Но ту же энергию можно выразить иначе. Пока шарики не заряжены, сблизим их до расстояния r_{12}, а затем будем собирать на них электричество. Потребуется работа

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\,dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_1^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_2^2\,dV + \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV.$$

Сравнивая оба выражения, находим

$$U = \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)\,dV. \tag{30.5}$$

§ 31. Термодинамика диэлектриков

1. Применим к процессу поляризации диэлектриков начала термодинамики. Будем предполагать, что диэлектрики *изотропны* как в отсутствие, так и при наличии электрического поля. К таким диэлектрикам относятся, например, жидкости и газы. Выделим мысленно достаточно малую часть диэлектрика, которая с достаточной точностью может считаться однородной. С той же точностью могут рассматриваться как однородные давление $\mathscr{P}$, а также напряженность электрического поля внутри этой части. Первое начало термодинамики для выделенной части запишем в виде

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{31.1}$$

где δQ — количество сообщенного тепла, а dU — приращение внутренней энергии. Работа диэлектрика δA слагается из двух частей. Первая часть $\mathscr{P}\,dV$ есть работа против внешнего давления. Вторая есть электрическая работа и представляется выражением (29.1). Влияние слагаемого $\mathscr{P}\,dV$ было подробно исследовано во втором томе нашего курса. Поэтому в целях сокращения изложения мы его здесь опустим. Таким образом, мы предполагаем, что поляриза-