

нечно малой плотностью. Соберем все электричество на шариках. Так как расстояние между ними бесконечно велико, то они не будут оказывать никакого влияния друг на друга. Вся работа пойдет на увеличение собственных энергий шариков. Эти энергии будут равны соответственно

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV, \quad W_2 = \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV.$$

Затем заряженные шарики сблизим, для чего потребуется совершить работу $U = q_1 q_2 / r_{12}$ (расстояние между шариками r_{12} должно быть очень велико по сравнению с их размерами). Полная электрическая энергия шариков будет

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV + U.$$

Но ту же энергию можно выразить иначе. Пока шарики не заряжены, сблизим их до расстояния r_{12} , а затем будем собирать на них электричество. Потребуется работа

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E_1 + E_2)^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV + \frac{1}{4\pi} \int (E_1 E_2) dV.$$

Сравнивая оба выражения, находим

$$U = \frac{1}{4\pi} \int (E_1 E_2) dV. \quad (30.5)$$

§ 31. Термодинамика диэлектриков

1. Применим к процессу поляризации диэлектриков начала термодинамики. Будем предполагать, что диэлектрики *изотропны* как в отсутствие, так и при наличии электрического поля. К таким диэлектрикам относятся, например, жидкости и газы. Выделим мысленно достаточно малую часть диэлектрика, которая с достаточной точностью может считаться однородной. С той же точностью могут рассматриваться как однородные давление \mathcal{P} , а также напряженность электрического поля внутри этой части. Первое начало термодинамики для выделенной части запишем в виде

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (31.1)$$

где δQ — количество сообщенного тепла, а dU — приращение внутренней энергии. Работа диэлектрика δA складывается из двух частей. Первая часть $\mathcal{P} dV$ есть работа против внешнего давления. Вторая есть электрическая работа и представляется выражением (29.1). Влияние слагаемого $\mathcal{P} dV$ было подробно исследовано во втором томе нашего курса. Поэтому в целях сокращения изложения мы его здесь опустим. Таким образом, мы предполагаем, что поляриза-

ция диэлектрика либо не сопровождается заметными изменениями его объема, либо этот объем поддерживается постоянным. Кроме того, не теряя общности, мы можем относить все величины к единице объема диэлектрика, т. е. в формуле (29.1) положить $V = 1$. В результате получим

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi} E dD. \quad (31.2)$$

2. Введем энтропию системы S , абсолютную температуру T , а также термодинамические функции: свободную энергию

$$\Psi = U - TS, \quad (31.3)$$

термодинамический потенциал

$$\Phi = \Psi - \frac{1}{4\pi} ED \quad (31.4)$$

и энтальпию

$$I = U + \frac{1}{4\pi} ED. \quad (31.5)$$

Для квазистатических процессов $\delta Q = T dS$ и уравнение (31.2) запишется в виде

$$dU = T dS + \frac{1}{4\pi} E dD. \quad (31.6)$$

Используя это соотношение и взяв дифференциалы от выражений (31.3) — (31.5), найдем

$$d\Psi = -S dT + \frac{1}{4\pi} E dD, \quad (31.7)$$

$$d\Phi = -S dT - \frac{1}{4\pi} D dE, \quad (31.8)$$

$$dI = T dS - \frac{1}{4\pi} D dE. \quad (31.9)$$

Уравнения (31.6) — (31.9) являются основными уравнениями термодинамики диэлектриков. Для получения из них конкретных выводов их необходимо дополнить «уравнением состояния». Роль такого уравнения играет соотношение вида

$$D = f(E, T, \tau), \quad (31.10)$$

где τ — плотность вещества диэлектрика. Такое уравнение не может быть выведено чисто термодинамическими методами. Оно должно быть заимствовано либо из опыта, либо из молекулярной теории поляризации диэлектриков.

3. Считая, что векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} связаны уравнением состояния (31.10) и интегрируя выражение (31.7) при постоянных T и τ ,

получим

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \int E dD + \Psi_0(T, \tau), \quad (31.11)$$

где $\Psi_0(T, \tau)$ — постоянная интегрирования. Она, очевидно, имеет смысл свободной энергии диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля. Таким образом, мы вновь приходим к выводу, что формула (29.2) выражает не внутреннюю, а *свободную энергию* диэлектрика, точнее, ту ее часть, которая зависит от напряженности электрического поля. Возьмем уравнение состояния в виде $D = \epsilon E$. Величина ϵ зависит только от T и τ , которые при интегрировании в формуле (31.11) должны оставаться постоянными. Поэтому интегрирование дает

$$\Psi = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{D^2}{8\pi\epsilon} + \Psi_0. \quad (31.12)$$

Найдем теперь выражение для внутренней энергии диэлектрика U . Из формул (31.3) и (31.7) получаем

$$U = \Psi - T \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{D, \tau}, \quad (31.13)$$

причем мы явно отметили, что при дифференцировании плотность τ должна оставаться постоянной, так как все наше рассмотрение проведено в предположении постоянства τ . Используя выражение (31.2), из формулы (31.13) найдем

$$U = \left(1 + \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right) \frac{D^2}{8\pi\epsilon} + U_0(T, \tau) = \left(\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right) \frac{E^2}{8\pi} + U_0(T, \tau), \quad (31.14)$$

где функция $U_0(T, \tau)$ имеет смысл *внутренней энергии* диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля. Если диэлектрическая проницаемость ϵ не зависит от температуры, то электрические составляющие свободной и внутренней энергий диэлектрика равны между собой. При наличии температурной зависимости ϵ это равенство уже несправедливо.

4. Если изменение поляризации диэлектрика производится квазистатически и адиабатически, то оно, вообще говоря, сопровождается изменением температуры диэлектрика. Такое изменение температуры называется *электрокалорическим эффектом*. При квазистатическом адиабатическом процессе энтропия S остается постоянной. Рассматривая ее как функцию E и T (τ поддерживается постоянной), можно написать для бесконечно малого процесса

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_E \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_T \Delta E = 0.$$

Очевидно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_E = \frac{1}{T} \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_E = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_E = \frac{C_E}{T},$$

где C_E — теплоемкость единицы объема диэлектрика при постоянной напряженности электрического поля E . Далее, из формулы (31.8) получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E = \frac{E}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.$$

Таким образом,

$$\Delta T = -\frac{TE}{4\pi C_E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dE. \quad (31.15)$$

При конечном изменении напряженности поля от E_1 до E_2 температура диэлектрика изменяется на

$$T_2 - T_1 = -\int_{E_1}^{E_2} \frac{TE}{4\pi C_E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dE. \quad (31.16)$$

5. Иногда внутреннюю энергию и прочие термодинамические функции диэлектрика определяют несколько иначе. Исключим из формулы (31.2) D , пользуясь определением (13.3). Получим

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi} E dE - E dP.$$

Затем введем новую функцию состояния

$$U' = U - E^2/(8\pi). \quad (31.17)$$

Тогда

$$\delta Q = dU' - E dP. \quad (31.18)$$

Функция U' получается вычитанием из U величины $E^2/(8\pi)$, которая может быть истолкована как *плотность электрической энергии в вакууме*. Таким образом, U' имеет смысл той части плотности внутренней энергии диэлектрика, которая связана с его *поляризацией*. Однако в приложениях термодинамики такая интерпретация не обязательна. Для термодинамики важно только, что величина U' есть *функция состояния*. Она может быть использована в термодинамических соотношениях вместо внутренней энергии U , и притом с тем же успехом. Величину U' можно было бы назвать *энергией поляризации диэлектрика*. С введением этой величины соотношение (31.6) переходит в

$$dU' = T dS + E dP. \quad (31.19)$$

Свободная энергия поляризации диэлектрика должна быть определена выражением $F' = U' - TS$. Соответственно изменяются определения (31.4) и (31.5), а также термодинамические соотношения (31.7) — (31.9).

ЗАДАЧА

Найти разность между теплоемкостями единицы объема диэлектрика при постоянной индукции C_D и постоянной напряженности электрического поля C_E . Как осуществить нагревание при постоянном D и при постоянном E ?

О т в е т.

$$C_D - C_E = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_D \left(\frac{\partial D}{\partial T} \right)_E = - \frac{T}{4\pi} \frac{E^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)^2. \quad (31.20)$$

Надо нагревать диэлектрик в плоском конденсаторе. Если конденсатор отсоединен от источника напряжения, то $D = \text{const}$. Если же он присоединен к источнику, поддерживающему разность потенциалов между обкладками неизменной, то $E = \text{const}$.

§ 32. Свободная энергия и силы

1. В электрическом поле на диэлектрики и проводники действуют силы. Их называют *пондеромоторными силами*, т. е. силами, действующими на *весомые тела*. Этот термин был введен в то время, когда в физике, наряду с обычными веществами, признавалось существование многих *невесомых субстанций* (теплород, эфир, электрические и магнитные жидкости и пр.). Теперь он устарел, так как невесомых субстанций не существует. Однако мы сохраняем его за неимением другого. Первопричиной возникновения пондеромоторных сил являются электрические заряды, сообщаемые телам. Однако сообщение зарядов телам осложняется появлением поляризационных зарядов и упругих деформаций в диэлектриках и проводниках. Вычисление пондеромоторных сил с одновременным исследованием механизма их возникновения в общем случае довольно затруднительно. Термодинамика дает общий метод вычисления пондеромоторных сил, отвлекаясь от причин их появления.

2. Поясним этот метод на примере плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено каким-то диэлектриком. Зарядим конденсатор, а затем отключим его от источника электричества, поддерживая тем самым заряды на пластинах постоянными. Между пластинами возникнут силы притяжения. Обозначим через F одну из них, например силу, действующую на положительно заряженную пластину (рис. 84). Пластина, заряженную отрицательно, закрепим, а к положительно заряженной пластине приложим внешнюю силу F' , уравновешивающую силу F . Если нарушить равновесие, бесконечно мало изменив силу F' , то положительная пластина начнет бесконечно медленно перемещаться. Кинетическую энергию возникшего движения можно не учитывать, так как процесс можно провести бесконечно медленно (квазистатически) и достаточно долго. Тогда сила F' будет отличаться от силы F бесконечно мало, а потому с точностью до бесконечно малых высшего порядка работы этих сил $\delta A'$ и δA будут равны по величине и противоположны по знаку: $\delta A' = -\delta A$. Процесс может сопро-