ЗАДАЧА

Найти разность между теплоемкостями единицы объема диэлектрика при постоянной индукции C_D и постоянной напряженности электрического поля C_E. Как осуществить нагревание при постоянном D и при постоянном E?

Ответ.

$$C_D - C_E = \frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_D \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E = -\frac{T}{4\pi}\frac{E^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^2. \qquad (31.20)$$

Надо нагревать диэлектрик в плоском конденсаторе. Если конденсатор отсоединен от источника напряжения, то $D = \text{const}$. Если же он присоединен к источнику, поддерживающему разность потенциалов между обкладками неизменной, то $E = \text{const}$.

§ 32. Свободная энергия и силы

1. В электрическом поле на диэлектрики и проводники действуют силы. Их называют *пондеромоторными силами*, т. е. силами, действующими на *весомые тела*. Этот термин был введен в то время, когда в физике, наряду с обычными веществами, признавалось существование многих *невесомых субстанций* (теплород, эфир, электрические и магнитные жидкости и пр.). Теперь он устарел, так как невесомых субстанций не существует. Однако мы сохраняем его за неимением другого. Первопричиной возникновения пондеромоторных сил являются электрические заряды, сообщаемые телам. Однако сообщение зарядов телам осложняется появлением поляризационных зарядов и упругих деформаций в диэлектриках и проводниках. Вычисление пондеромоторных сил с одновременным исследованием механизма их возникновения в общем случае довольно затруднительно. Термодинамика дает общий метод вычисления пондеромоторных сил, отвлекаясь от причин их появления.

2. Поясним этот метод на примере плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено каким-то диэлектриком. Зарядим конденсатор, а затем отключим его от источника электричества, поддерживая тем самым заряды на пластинах постоянными. Между пластинами возникнут силы притяжения. Обозначим через $\boldsymbol{F}$ одну из них, например силу, действующую на положительно заряженную пластину (рис. 84). Пластину, заряженную отрицательно, закрепим, а к положительно заряженной пластине приложим внешнюю силу $\boldsymbol{F}'$, уравновешивающую силу $\boldsymbol{F}$. Если нарушить равновесие, бесконечно мало изменив силу $\boldsymbol{F}'$, то положительная пластина начнет бесконечно медленно перемещаться. Кинетическую энергию возникшего движения можно не учитывать, так как процесс можно провести бесконечно медленно (квазистатически) и достаточно долго. Тогда сила $\boldsymbol{F}'$ будет отличаться от силы $\boldsymbol{F}$ бесконечно мало, а потому с точностью до бесконечно малых высшего порядка работы этих сил $\delta A'$ и δA будут равны по величине и противоположны по знаку: $\delta A' = -\delta A$. Процесс может сопровождаться *выделением* или *поглощением тепла*. Будем это тепло отводить, чтобы *температура системы оставалась постоянной*. Тогда работа внешней силы $\boldsymbol{F}'$ пойдет на приращение свободной энергии системы: $\delta A' = d\Psi$, или

$$\delta A + (d\Psi)_{q,T} = 0. \tag{32.1}$$

Значки q и T указывают, что приращение свободной энергии должно быть вычислено при постоянных q и T. Вычислив по формуле (32.1) работу δA, можно затем найти и искомую силу $\boldsymbol{F}$.

Формула (32.1) носит совершенно общий характер. Она применима к *любым системам*, а не только к плоскому конденсатору. Надо только под δA понимать работу *всех сил*, действующих в системе при произвольных бесконечно малых смещениях входящих в нее тел и диэлектрической среды между ними. Такие смещения называются *возможными* или *виртуальными смещениями* в отличие от *действительных смещений*, которые возникают в системе при том или ином ее движении. В связи с этим отметим, что при получении формулы (32.1) мы допустили некоторую неточность. При смещении пластины конденсатора диэлектрик может входить или выходить из конденсатора. Величина δA должна включать и работу сил при таком смещении диэлектрика.

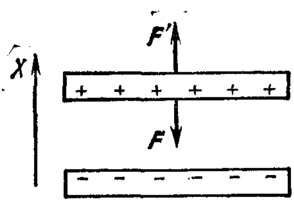

Рис. 84.

3. Согласно формуле (28.8) полная свободная энергия Ψ слагается из электрической части $\Psi_{эл} = W$ и упругой части $\Psi_{упр}$. На такие же две части можно разделить и виртуальную работу δA, причем

$$\delta A_{эл} + (dW)_{q,T} = 0, \tag{32.2}$$

$$\delta A_{упр} + (dW_{упр})_{q,T} = 0. \tag{32.3}$$

Таким способом пондеромоторные силы, действующие на проводники и диэлектрики, можно разделить на *электрические* и *упругие*.

Электрическую часть виртуальной работы $\delta A_{эл}$ можно вычислить иначе. Формула (32.2) относится к тому случаю, когда при виртуальных смещениях *заряды тел поддерживаются постоянными*. Допустим теперь, что тела системы соединены с источниками электричества (например, гальваническими батареями), которые при виртуальных смещениях поддерживают постоянными *потенциалы всех тел*. Пондеромоторные силы, а с ними и величина виртуальной работы $\delta A_{эл}$, конечно, не зависят от того, происходят ли виртуальные смещения при постоянных зарядах, при постоянных потенциалах или как-либо иначе. Введение виртуальных смещений надо рассматривать как *искусственный прием* для вычисления действующих сил. Но виртуальные смещения к вопросу о возникновении этих сил не имеют прямого отношения. Однако приращение свободной энергии dW при виртуальных смещениях существенно зависит от того, при каких условиях эти смещения производятся. Поясним это сначала на примере конденсатора. При виртуальных смещениях его обкладок или диэлектрической среды между ними меняется емкость конденсатора C. Если конденсатор отключен от источника электричества ($q = \text{const}$), то приращение свободной энергии $W = q^2/(2C)$ будет

$$(dW)_{q,T} = \frac{q^2}{2}\delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\delta C = -\frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C,$$

а виртуальная работа, согласно формуле (32.2), $\delta A_{эл} = \varphi^2\delta C/2$. Если же конденсатор подключен к гальванической батарее ($\varphi = \text{const}$), то, представив W в виде $W = C\varphi^2/2$, получим

$$(dW)_{\varphi,T} = \frac{1}{2}\varphi^2\,\delta C.$$

Эта величина отличается от предыдущего выражения знаком. Различие обусловлено тем, что во втором случае гальваническая батарея поставляет конденсатору дополнительный заряд $\delta q = \varphi\,\delta C$, совершая при этом работу $\delta A_{бат} = \varphi\,\delta q = \varphi^2\delta C$. Теперь приращение свободной энергии определяется полной внешней работой, т. е. величиной

$$\delta A_{бат} - \delta A_{эл} = \varphi^2\,\delta C - \varphi^2\,\delta C/2 = \varphi^2\,\delta C/2.$$

Таким образом,

$$(dW)_{q,T} = -(dW)_{\varphi,T}, \tag{32.4}$$

$$\delta A_{эл} - (dW)_{\varphi,T} = 0. \tag{32.5}$$

4. Применимость полученных формул не ограничивается случаем конденсатора. Формулы (32.4) и (32.5) носят совершенно общий характер. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную систему проводников, пространство между которыми заполнено каким угодно диэлектриком. Свободная энергия такой системы определяется выражением (28.4) или

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\varphi_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}q_iq_j.$$

При виртуальных смещениях проводников или диэлектрической среды между ними меняются емкостные и потенциальные коэффициенты. Если смещения происходят при постоянных потенциалах проводников, то

$$(dW)_{\varphi,T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\delta C_{ij}.$$

Если же они происходят при постоянных зарядах, то

$$(dW)_{q,T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_iq_j\delta V_{ij}.$$

Докажем, что эти выражения удовлетворяют соотношению (32.4). Подставив в формулу (27.5) выражение для φ_j из формулы (27.4), получим

$$q_i = \sum_{j,k} C_{ij} V_{jk} q_k.$$

Отсюда

$$\sum_j C_{ij} V_{jk} = \delta_{ik}, \tag{32.6}$$

где δ_{ik} равно нулю при $i \neq k$ и единице при $i = k$. Варьируя полученное соотношение, найдем

$$\sum_j \delta C_{ij} V_{jk} + \sum_j C_{ij} \delta V_{jk} = 0, \tag{32.7}$$

причем здесь, ввиду симметрии потенциальных и емкостных коэффициентов, можно переставлять местами индексы i и j, а также j и k. С использованием соотношений (32.6) и (32.7) можем написать

$$\begin{aligned}
(dW)_{q,T} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i q_j \delta V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} C_{ik} C_{jl} \varphi_k \varphi_l \delta V_{ij} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} C_{jl} \varphi_k \varphi_l \sum_i C_{ki} \delta V_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k,l} C_{jl} \varphi_k \varphi_l \sum_i \delta C_{ki} V_{ij} = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,k,l} \varphi_k \varphi_l \delta C_{ki} \sum_j V_{ij} C_{jl} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,l} \varphi_k \varphi_l \delta C_{ki} \delta_{il} = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_k \varphi_i \delta C_{ki} = -(dW)_{\varphi,T}.
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (32.4) доказано. При доказательстве предполагалось, что свободные заряды находятся только на проводниках. Однако доказательство может быть распространено и на тот случай, когда свободные заряды имеются и в диэлектриках. Достаточно мысленно разделить диэлектрики на малые части таким образом, чтобы потенциал каждой из таких частей с достаточной точностью можно было считать одним и тем же во всех ее точках. Для таких малых частей диэлектриков можно ввести емкостные и потенциальные коэффициенты совершенно так же, как это было сделано для проводников. Поэтому доказательство, изложенное выше, может быть распространено без всяких изменений и на случай диэлектриков.

5. Рассмотрим теперь произвольную систему заряженных проводников в вакууме. Заполним все пространство между ними однородной несжимаемой жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε, сохраняя заряды проводников неизменными. От этого индукция поля $\boldsymbol{D}$ не изменится, а его напряженность $\boldsymbol{E}$ уменьшится в ε раз (см. § 22, пункт 3). Уменьшится в ε раз и электрическая часть свободной энергии W. Так как жидкость несжимаемая, то при виртуальных смещениях упругая часть свободной энергии Ψ изменяться не будет. Поэтому силы взаимодействия между проводниками будут определяться только изменениями величины W. А так как при заполнении пространства диэлектрической жидкостью эта величина уменьшается в ε раз, то во столько же раз уменьшатся и силы взаимодействия между проводниками.

6. Вернемся в заключение к примеру, с которого мы начали изложение в настоящем параграфе. Доведем до конца вычисление силы притяжения между пластинами плоского конденсатора, предполагая, что все пространство заполнено несжимаемой однородной жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε (см. рис. 84). Упругую часть свободной энергии можно не принимать во внимание, так как для несжимаемой жидкости $d\Psi = dW$. Направим ось X от отрицательной пластины к положительной и сместим положительную пластину в направлении оси X на величину δx, сохраняя заряды пластин неизменными. При неизменных зарядах останется постоянной индукция $\boldsymbol{D}$ в конденсаторе, а с ней и объемная плотность свободной энергии

$$w = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}.$$

При смещении объем конденсатора увеличится на $\delta V = S\,\delta x$, где S — площадь пластины. Часть жидкости войдет в конденсатор, а его свободная энергия увеличится на $(d\Psi)_{q,\,T} = w\,\delta V = Sw\,\delta x$ (влиянием краевых эффектов мы пренебрегаем). Виртуальная работа, совершенная силой $\boldsymbol{F}$, будет $\delta A = F\,\delta x = Sf\,\delta x$. Подставляя эти значения в формулу (32.1), получим

$$f = -w = -\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{32.8}$$

Таким образом, сила f, отнесенная к единице площади, численно равна плотности свободной энергии w. Сила получилась отрицательной: она направлена в отрицательную сторону оси X, т. е. является *силой притяжения*.

7. Выражение (32.8) дает полную силу притяжения между пластинами конденсатора (отнесенную к единице площади). Она слагается из упругой силы $f_{\text{упр}}$ и электрической силы $f_{\text{эл}}$. Чтобы выделить эти составные части, надо несжимаемую жидкость рассматривать как предельный случай сжимаемой. Существенно заметить, что виртуальное смещение δx можно выбрать *каким угодно*. От этого величина полной силы f не изменится. Возьмем такое виртуальное смещение положительно заряженной пластины δx, чтобы жидкость в конденсатор не поступала. Для этого, конечно, надо ввести добавочные уравновешивающие силы. Однако эти силы не будут совершать работы, поскольку они приложены к неподвижным частям жидкости. При неизменных зарядах индукция $\boldsymbol{D}$, по-прежнему, меняться не будет. Но плотность жидкости в конденсаторе τ, а с ней и диэлектрическая проницаемость ε изменятся. В случае сжимаемой жидкости надо учитывать изменения и упругой части свободной энергии. Полное изменение свободной энергии будет $d\Psi = d\Psi_{\text{упр}} + dW$. Для изменения упругой свободной энергии имеем

$$d\Psi_{\text{упр}} = -(\mathscr{P} - \mathscr{P}_0)\,\delta V,$$

где $\mathscr{P}$ — гидростатическое давление жидкости в конденсаторе, а $\mathscr{P}_0$ — вне его. Изменение электрической части свободной энергии определяется выражением

$$(dW)_{q,T}=\delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}V\right)=\frac{D^2}{8\pi}\delta\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\delta V-\frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}V\,\delta\varepsilon.$$

Диэлектрическая проницаемость ε является функцией только плотности жидкости τ и температуры T, так что

$$\delta\varepsilon=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\delta\tau.$$

Изменение плотности можно найти из условия сохранения массы жидкости в конденсаторе: $\tau V=\mathrm{const}$. Оно дает $V\,\delta\tau+\tau\,\delta V=0$. Определив отсюда $\delta\tau$ и учтя соотношение $\delta V=S\,\delta x$, получим

$$(dW)_{q,T}=\left(\varepsilon+\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}S\,\delta x.$$

Подстановка полученных выражений в (32.1) приводит к результату

$$f=(\mathscr{P}-\mathscr{P}_0)-\left(\varepsilon+\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}. \qquad (32.9)$$

Тем самым выделена упругая часть силы $f_{\text{упр}}=\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$. Для несжимаемых (точнее, слабо сжимаемых) жидкостей в состоянии равновесия формула (32.9) должна переходить в (32.8), т. е. должно быть

$$\mathscr{P}-\mathscr{P}_0=\tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\frac{E^2}{8\pi}. \qquad (32.10)$$

Таким образом, дополнительная электрическая сила

$$-\tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\frac{E^2}{8\pi},$$

возникающая в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика, компенсируется гидростатическим давлением. Более строгое обоснование этого утверждения будет дано в §§ 33 и 34. Однако такая компенсация имеет место *только в статике*. Если электрическое поле меняется во времени, то компенсации, вообще говоря, нет.

ЗАДАЧИ

1. Получить выражение для силы притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора, рассматривая эту силу как результат взаимодействия электрических зарядов.

Решение. Одна из пластин конденсатора создает электрическое поле $E_1=2\pi\sigma$. Это поле действует на вторую пластину с силой $F=S\sigma F_1=2\pi\sigma^2S$. Поверхностная плотность электричества σ связана с напряженностью электрического поля в конденсаторе E соотношением $E = 4\pi\sigma$. Исключая σ, получим

$$F = \frac{E^2}{8\pi} S. \tag{32.11}$$

2. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена плоскопараллельная пластинка из твердого диэлектрика, так что между ней и пластинами конденсатора остались воздушные зазоры. Как изменится при этом сила притяжения между пластинами конденсатора?

Ответ. Сила притяжения не изменится.

3. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 85). Все пластины имеют форму полукруга радиуса R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил M, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов φ, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

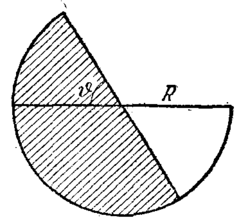

Рис. 85.

Ответ. $M = (\varepsilon - 1)\, R^2\varphi^2/(16\pi d)$. Момент M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

4. В предыдущей задаче величина момента M не зависит от угла поворота ϑ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\vartheta = 0$, момент M должен обращаться в нуль. Объяснить это расхождение.

§ 33. Максвелловские натяжения и давления

1. В настоящем и следующем параграфах будет продолжено изучение пондеромоторных сил, действующих в электрических полях. Найдем пондеромоторные силы, действующие на границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела может быть равна нулю, но может быть и отличной от нуля. Для последующих вычислений это не имеет значения. Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле *однородно и перпендикулярно к границе раздела*. Примером может служить плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено двумя однородными диэлектрическими жидкостями, граничащими вдоль плоскости, параллельной пластинам конденсатора (рис. 86). Предположим, что обе жидкости несжимаемы. Тогда при виртуальных смещениях упругая часть свободной энергии изменяться не будет. Сместим изотермически границу раздела вверх на расстояние δx, сохраняя заряды пластин постоянными. При постоянных зарядах останутся постоянными и индукции в диэлектриках $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, а с ними и плотности свободной энергии

$$w_1 = \frac{D_1^2}{8\pi\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad w_2 = \frac{D_2^2}{8\pi\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{8\pi}. \tag{33.1}$$