

электрического поля в конденсаторе E соотношением $E = 4\pi\sigma$. Исключая σ , получим

$$F = \frac{E^2}{8\pi} S. \quad (32.11)$$

2. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена плоско-параллельная пластинка из твердого диэлектрика, так что между ней и пластинами конденсатора остались воздушные зазоры. Как изменится при этом сила притяжения между пластинами конденсатора?

О т в е т. Сила притяжения не изменится.

3. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 85). Все пластины имеют форму полукруга радиуса R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил M , действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов Φ , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ϵ .

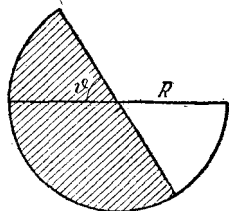


Рис. 85.

О т в е т. $M = (\epsilon - 1) R^2 \Phi^2 / (16\pi d)$. Момент M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

4. В предыдущей задаче величина момента M не зависит от угла поворота ϑ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\vartheta = 0$, момент M должен обращаться в нуль. Объяснить это расхождение.

§ 33. Максвелловские натяжения и давления

1. В настоящем и следующем параграфах будет продолжено изучение пондеромоторных сил, действующих в электрических полях. Найдем пондеромоторные силы, действующие на границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела может быть равна нулю, но может быть и отличной от нуля. Для последующих вычислений это не имеет значения. Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле *однородно и перпендикулярно к границе раздела*. Примером может служить плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено двумя однородными диэлектрическими жидкостями, граничащими вдоль плоскости, параллельной пластинам конденсатора (рис. 86). Предположим, что обе жидкости несжимаемы. Тогда при виртуальных смещениях упругая часть свободной энергии изменяться не будет. Сместим изотермически границу раздела вверх на расстояние δx , сохраняя заряды пластин постоянными. При постоянных зарядах останутся постоянными и индукции в диэлектриках D_1 и D_2 , а с ними и плотности свободной энергии

$$\omega_1 = \frac{D_1^2}{8\pi\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1 E_1^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{D_2^2}{8\pi\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2 E_2^2}{8\pi}. \quad (33.1)$$

При смещении жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 будет входить в конденсатор, а с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 — выходить. Приращение свободной энергии будет

$$(d\Psi)_{q,T} = (dW)_{q,T} = (w_1 - w_2) S \delta x,$$

а работа пондеромоторных сил $\delta A = fS \delta x$. Подставляя эти выражения в формулу (32.1), находим силу f , действующую на единицу площади границы раздела:

$$f = w_2 - w_1. \quad (33.2)$$

причем за положительное мы приняли направление вверх.

2. Совершенно аналогично решается вопрос о пондеромоторных силах, когда *электрическое поле параллельно границе раздела диэлектриков*. Рассмотрим снова плоский конденсатор с двумя диэлектрическими жидкостями, заполняющими его, как показано на

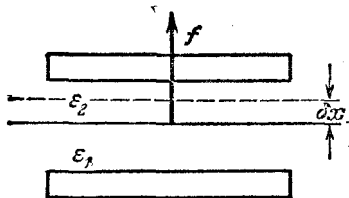


Рис. 86.

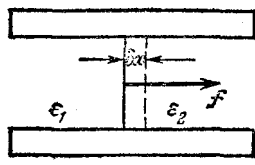


Рис. 87.

рис. 87. В рассматриваемом случае виртуальное смещение δx границы раздела удобнее произвести при постоянной разности потенциалов между пластинами конденсатора. Плотности свободной энергии w_1 и w_2 в обоих диэлектриках при этом изменяться не будут. Свободная энергия получит приращение

$$(d\Psi)_{\varphi,T} = (dW)_{\varphi,T} = (w_1 - w_2) S_1 \delta x,$$

где S_1 — площадь границы раздела между диэлектриками. Виртуальная работа $\delta A = S_1 f \delta x$. Подставив эти значения в формулу (32.5), найдем силу f , действующую на единицу площади границы раздела:

$$f = w_1 - w_2, \quad (33.3)$$

причем за положительное мы приняли направление от первого диэлектрика ко второму.

3. Рассматривая формулы (33.2) и (33.3), мы видим, что все происходит так, как если бы вдоль электрических силовых линий существовало *натяжение*, а перпендикулярно к ним — *давление*. Величины натяжения \mathcal{T} и давления $\Pi = -\mathcal{T}$ численно равны плотности электрической свободной энергии w . Формула (33.2) показывает, что действующая сила определяется *разностью натя-*

жений, а формула (33.3) — разностью давлений по разные стороны границы раздела. Такая интерпретация согласуется также с формулой (32.8), определяющей силу, действующую на границе заряженного проводника. Величины \mathcal{F} и Π получили название *максвелловских натяжений и давлений*. Фарадей и Максвелл считали эти величины вполне аналогичными упругим натяжениям и давлениям, существующим в диэлектриках и в чистом эфире. От такой механической интерпретации наука давно отказалась. Но при вычислении пондеромоторных сил можно пользоваться наглядной картиной максвелловских натяжений и давлений, поскольку она приводит к верным результатам.

4. Если электрическое поле E параллельно границе раздела, то $E_1 = E_2$, так что индексы 1 и 2 можно опустить и написать

$$f = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_1 - \epsilon_2) E^2. \quad (33.4)$$

Предположим, что $\epsilon_1 > \epsilon_2$. Тогда $f > 0$, т. е. сила f направлена вправо (рис. 87) — от диэлектрика с большей к диэлектрику с меньшей диэлектрической проницаемостью. То же будет и в том случае, когда поле E нормально к границе раздела, если только на этой границе нет свободных электрических зарядов. Действительно, при выполнении этого условия $D_1 = D_2 = D$, и формула (33.2) принимает вид

$$f = \frac{D^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right). \quad (33.5)$$

Если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, то $f > 0$, т. е. сила f направлена вверх — от первого диэлектрика ко второму (см. рис. 86). Вообще, независимо от направления электрического поля, *пондеромоторные силы, действующие на незаряженной границе двух диэлектриков, направлены всегда в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью*. Существованием таких сил объясняется притяжение легких кусочков бумаги наэлектризованной палочкой.

Если две параллельные металлические пластинки частично погрузить в диэлектрическую жидкость, то она немного поднимается под действием капиллярных сил. Если между пластинками создать разность потенциалов в несколько тысяч вольт, то поднятие становится еще больше — жидкость втягивается в конденсатор.

Если диэлектрическая проницаемость тела меньше диэлектрической проницаемости окружающей среды, то тело выталкивается в область более слабого электрического поля. Демонстрацией может служить следующий опыт. Берется стеклянный сосуд, наполненный керосином или дистиллированной водой (рис. 88). Через отверстие A на загнутом конце стеклянной трубочки выдувается воздух под небольшим давлением. Если нет электрического поля, то пузырьки воздуха поднимаются вертикально вверх. Но если

в жидкость опустить электрически заряженный шарик, то пузырьки воздуха отталкиваются от него и отклоняются в сторону.

5. При выводе формул (33.2) и (33.3) мы рассматривали диэлектрики как *абсолютно несжимаемые* жидкости. Таким путем нельзя отделить упругие силы от электрических. Чтобы сделать это, надо учесть *сжимаемость жидкостей* совсем так же, как мы поступали в предыдущем параграфе. Надо рассмотреть такие виртуальные смещения границы раздела диэлектриков, при которых изменялись бы плотности жидкостей. Сделаем это для случая, когда электрическое поле параллельно границе раздела диэлектриков (см. рис. 87). Виртуальное смещение границы раздела произведем так, чтобы количества обоих диэлектриков в конденсаторе оставались без изменения. Приращение упругой части свободной энергии можно не вычислять. Вместо этого, как было показано в предыдущем параграфе, можно к электрическому давлению прибавить, а из электрического натяжения вычесть гидростатическое давление \mathcal{P} .

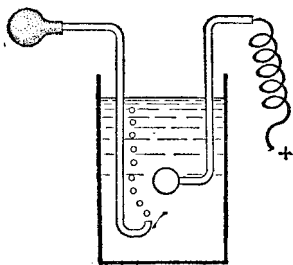


Рис. 88.

Поэтому мы ограничимся вычислением приращений только электрической части свободной энергии. Если V_1 — объем первого, а V_2 — второго диэлектриков, то $W = V_1 w_1 + V_2 w_2$. Виртуальное смещение границы произведем при постоянной разности потенциалов между пластинами конденсатора. Тогда напряженность электрического поля в конденсаторе E при смещении изменяться не будет, а потому

$$dW_{\varphi, T} = \frac{E^2}{8\pi} [\delta(V_1 \epsilon_1) + \delta(V_2 \epsilon_2)],$$

или

$$dW_{\varphi, T} = \frac{E^2}{8\pi} [(V_1 \delta \epsilon_1 + V_2 \delta \epsilon_2) + (\epsilon_1 \delta V_1 + \epsilon_2 \delta V_2)].$$

Диэлектрическая проницаемость жидкости зависит только от плотности и температуры последней. При изотермических изменениях

$$\delta \epsilon = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right)_T \delta \tau.$$

Так как масса первого диэлектрика остается неизменной, то $V_1 \tau_1 = \text{const}$. Отсюда $V_1 \delta \tau_1 = -\tau_1 \delta V_1$, и, следовательно,

$$V_1 \delta \epsilon_1 = -\tau_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \tau_1} \delta V_1.$$

Аналогично для второго диэлектрика:

$$V_2 \delta \epsilon_2 = -\tau_2 \frac{\partial \epsilon_2}{\partial \tau_2} \delta V_2.$$

Далее, очевидно, что $\delta V_1 = -\delta V_2 = S_1 \delta x$. Учтя все это, найдем $dW_{\text{ф.т}}$ и полученное выражение подставим в формулу (32.5). Учтем, кроме того, гидростатическое давление. Тогда вместо (33.3) получим формулу

$$f = \mathcal{F}_1 + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_1 - \tau_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau_1} \right) - \mathcal{F}_2 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_2 - \tau_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau_2} \right). \quad (33.6)$$

Если электрическое поле перпендикулярно к границе раздела диэлектриков, то рассуждения совершенно аналогичны. В этом случае формула (33.2) заменяется на

$$f = -\mathcal{F}_2 + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_2 + \tau_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau_2} \right) + \mathcal{F}_1 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_1 + \tau_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau_1} \right). \quad (33.7)$$

Таким образом, и с учетом зависимости диэлектрической проницаемости от плотности жидкости пондеромоторные силы в диэлектрике сводятся к *натяжению вдоль силовых линий* \mathcal{F} и к *давлению* Π *в перпендикулярном направлении*. Меняются только выражения для этих величин. Именно:

$$\mathcal{F} = -\mathcal{F} + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right), \quad (33.8)$$

$$\Pi = \mathcal{F} + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right). \quad (33.9)$$

Различием этих величин по разные стороны границы раздела диэлектриков и определяются силы, действующие на единицу поверхности указанной границы. Дополнительные силы, возникающие в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика, называются *электрострикционными силами*, а вызываемое ими изменение гидростатического давления и плотности диэлектрика — *электрострикцией*. Электрострикционные силы впервые были учтены Гельмгольцем (1821—1894). Максвелл их не учитывал, хотя величины $\tau \partial \varepsilon / \partial \tau$, как правило, того же порядка, что и ε . Тем не менее в электростатике для несжимаемых (точнее, слабо сжимаемых) жидкостей результаты Максвелла правильны, как это следует из их вывода, приведенного нами выше. Они должны согласовываться с формулами (33.8) и (33.9). Поэтому, *если несжимаемая жидкость находится в равновесии (гидростатика), то электрострикционные силы должны уравновешиваться силами гидростатического давления*. Иными словами, во всем объеме жидкости должно выполняться соотношение

$$\mathcal{F} - \tau \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \frac{E^2}{8\pi} = \text{const.} \quad (33.10)$$

Этот результат согласуется с ранее полученной формулой (32.10). Однако *если электрическое поле быстро меняется во времени, то соотношение (33.10), вообще говоря, несправедливо*.

ЗАДАЧИ

1. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена диэлектрическая пластинка толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 (рис. 89). Конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и плотностью τ . Найти высоту поднятия h жидкости в конденсаторе, пренебрегая капиллярными явлениями, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов φ . Суммарная толщина столбов жидкости в конденсаторе равна l_1 .

Ответ.
$$h = \frac{\epsilon_1 - 1}{8\pi\tau g} \left(\frac{\varphi\epsilon_2}{\epsilon_1 l_2 + \epsilon_2 l_1} \right)^2.$$

2. Диэлектрическая пластинка толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ϵ введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 90). Между поверхностью пластинки и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1 . Определить силу притяжения F между обкладками, если разность потен-

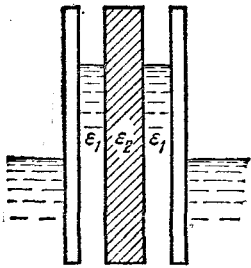


Рис. 89.

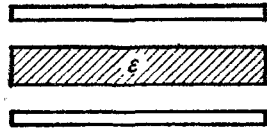


Рис. 90.

циалов между ними равна φ , а площадь пластинки S . Во что переходит выражение для F в предельном случае $l_1 \rightarrow 0$?

Ответ.
$$F = \frac{S}{8\pi} \left(\frac{\varphi\epsilon}{l_1\epsilon + l_2} \right)^2.$$

3. Капиллярный вольтметр состоит из капиллярной стеклянной трубочки с металлизированной полупрозрачной внутренней поверхностью, служащей одной из обкладок цилиндрического конденсатора. Второй обкладкой является тонкая металлическая проволока, коаксиальная с внутренней цилиндрической поверхностью трубочки. Определить поднятие мениска воды h в вольтметре при наложении на обкладки напряжения $V = 100$ В, если внутренний диаметр капилляра $D = 0,5$ мм, а диаметр проволоки $d = 0,05$ мм.

Ответ.
$$h = \frac{\varphi^2 (\epsilon - 1)}{\pi\tau g (D^2 - d^2) \ln(D/d)} \approx 5 \text{ мм.}$$

4. Капля жидкости заряжена электричеством. Найти зависимость упругости насыщенного пара над поверхностью капли от ее заряда q . Используя полученный результат, объяснить принцип действия камеры Вильсона.

Решение. Искомая зависимость находится в точности так же, как и зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости. Можно дословно повторить все рассуждения, приведенные в § 118 тома II. Дополнительно надо только учесть влияние электрического поля на высоту поднятия жидкости в капилляре. Электрическое поле должно быть перпендикулярно к поверхности мениска жидкости в капилляре. Влияние такого поля эквивалентно уменьшению поверхностного натяжения жидкости σ . Из капиллярного давления $2\sigma/r$ надо вычесть максвелловское натяжение

$$\frac{D^2}{8\pi} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{q^2}{8\pi r^4} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right),$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость капли, а r — ее радиус. Для проводящей капли в этой формуле следует положить $\epsilon = \infty$. То же можно делать для воды ввиду большого значения диэлектрической проницаемости последней ($\epsilon = 81$). В результате вместо формулы (118.5) тома II получится

$$\ln \frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_{ж}}{RT} \left(P_0 - P - \frac{2\sigma}{r} + \frac{q^2}{8\pi r^4} \right). \quad (33.11)$$

При $r = 0$ и $r = \infty$ эта формула дает соответственно $P = 0$ и $P = P_0$. В промежутке между этими значениями упругость насыщенного пара P достигает максимума. Дифференцируя (33.11) по r и полагая $dP/dr = 0$, находим, что это происходит при

$$r = r_0 \equiv \sqrt[3]{q^2/(4\pi\sigma)}. \quad (33.12)$$

Применим полученные результаты к капле воды, полагая q равным элементарному заряду e , находящемуся в центре капли. При 20°C для воды $\sigma = 73$ дин/см. По формуле (33.12) находим $r_0 = 6,3 \cdot 10^{-8}$ см. При таких малых размерах капель макроскопические формулы как точные количественные соотношения становятся сомнительными. Тем не менее мы воспользуемся ими, рассчитывая, что грубо качественно результаты получатся правильными. Мы не будем также смущаться тем обстоятельством, что в реальных условиях осаждающиеся ионы не попадают в центр капли, а могут находиться в ней в любом месте. Зависимость упругости насыщенного пара над заряженной каплей от ее радиуса представлена на рис. 91. Та же зависимость для незаряженной капли представляется пунктирной кривой. Заряд капли уменьшает упругость насыщенного пара, причем при $r < r_0$ упругость пара растет с увеличением радиуса капли. Этим и объясняется конденсация пара на ионах (см. т. II, § 119).

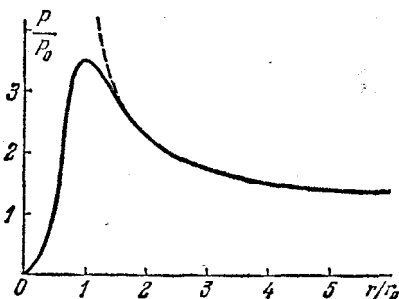


Рис. 91.

§ 34. Вычисление пондеромоторных сил в общем виде

1. Без ущерба для общности будем предполагать, что вещество и электричество распределены в пространстве *непрерывно*. Электрическую часть свободной энергии представим в виде

$$W = \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon} dV. \quad (34.1)$$

Пусть каждая частица диэлектрика вместе со своим электрическим зарядом претерпела бесконечно малое виртуальное смещение $q = q(r)$. Приращение величины W при таком виртуальном смещении будет

$$dW = \int \delta \left(\frac{D^2}{8\pi\epsilon} \right) dV = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D \delta D}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int D^2 \delta \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dV,$$

или

$$dW = \frac{1}{4\pi} \int E \delta D dV - \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \epsilon dV.$$