где ε — диэлектрическая проницаемость капли, а r — ее радиус. Для проводящей капли в этой формуле следует положить $\varepsilon = \infty$. То же можно делать для воды ввиду большого значения диэлектрической проницаемости последней ($\varepsilon = 81$). В результате вместо формулы (118.5) тома II получится

$$\ln \frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_{ж}}{RT}\left(P_0 - P - \frac{2\sigma}{r} + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right). \tag{33.11}$$

При $r = 0$ и $r = \infty$ эта формула дает соответственно $P = 0$ и $P = P_0$. В промежутке между этими значениями упругость насыщенного пара P достигает максимума. Дифференцируя (33.11) по r и полагая $dP/dr = 0$, находим, что это происходит при

$$r = r_0 \equiv \sqrt[3]{q^2/(4\pi\sigma)}. \tag{33.12}$$

Применим полученные результаты к капле воды, полагая q равным элементарному заряду e, находящемуся в центре капли. При 20 °C для воды $\sigma = 73$ дин/см. По формуле (33.12) находим $r_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-8}$ см. При таких малых размерах капель макроскопические формулы как точные количественные соотношения становятся сомнительными. Тем не менее мы воспользуемся ими, рассчитывая, что грубо качественно результаты получатся правильными. Мы не будем также смущаться тем обстоятельством, что в реальных условиях осаждающиеся ионы не попадают в центр капли, а могут находиться в ней в любом месте. Зависимость упругости насыщенного пара над заряженной каплей от ее радиуса представлена на рис. 91. Та же зависимость для незаряженной капли представляется пунктирной кривой. Заряд капли уменьшает упругость насыщенного пара, причем при $r < r_0$ упругость пара растет с увеличением радиуса капли. Этим и объясняется конденсация пара на ионах (см. т. II, § 119).

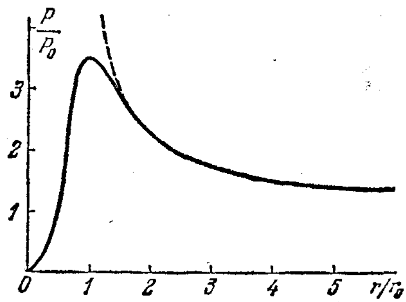

Рис. 91.

§ 34. Вычисление пондеромоторных сил в общем виде

1. Без ущерба для общности будем предполагать, что вещество и электричество распределены в пространстве *непрерывно*. Электрическую часть свободной энергии представим в виде

$$W = \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV. \tag{34.1}$$

Пусть каждая частица диэлектрика вместе со своим электрическим зарядом претерпела бесконечно малое виртуальное смещение $q = q(r)$. Приращение величины W при таком виртуальном смещении будет

$$\delta W = \int \delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\right) dV = \frac{1}{4\pi}\int \frac{D\,\delta D}{\varepsilon}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int D^2 \delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) dV,$$

или

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\, dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\, dV.$$

Здесь символ δ применяется для обозначения *локальных* изменений соответствующих величин, т. е. изменений в одном и том же месте пространства, обусловленных виртуальными смещениями вещества и электричества. Интегрирование производится по всему бесконечному пространству. Преобразуем первый интеграл с помощью интегральной теоремы Гаусса — Остроградского. Интегрируя сначала по конечному объему, ограниченному замкнутой поверхностью S, имеем

$$\int \boldsymbol{E}\,\delta\boldsymbol{D}\,dV = -\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\boldsymbol{D}\,dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\boldsymbol{D})\,dV + \int \varphi\operatorname{div}\delta\boldsymbol{D}\,dV =$$
$$= -\oint \varphi\,\delta\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{S} + 4\pi\int \varphi\,\delta\rho\,dV.$$

Предполагая, что все заряды находятся в ограниченной области пространства, будем удалять в бесконечность окружающую их замкнутую поверхность S. Тогда в пределе первый интеграл обратится в нуль, и мы получим

$$dW = \int \varphi\,\delta\rho\,dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2\,\delta\varepsilon\,dV. \tag{34.2}$$

2. Для упрощения последующих рассуждений предположим, что виртуальное смещение претерпевают только частицы вещества, находящиеся внутри бесконечно тонкого цилиндра, параллельного оси X. Пусть это бесконечно малое смещение происходит параллельно той же оси и является произвольной функцией

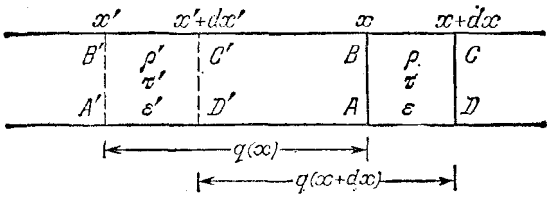

Рис. 92.

координаты x: $q = x - x' = q(x)$ (рис. 92). Найдем *локальные* изменения плотности электричества $\delta\rho$ и диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$ в бесконечно малом элементе объема $ABCD$. Через сечение AB внутрь объема $ABCD$ входит заряд $q(x)\ \rho\,(x)\,dS$, через сечение CD выходит заряд $q\,(x+dx)\ \rho\,(x+dx)\,dS$, где dS — площадь поперечного сечения. Избыток входящего заряда над выходящим составляет

$$[q\,(x)\,\rho\,(x) - q\,(x+dx)\,\rho\,(x+dx)]\,dS = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}\,dV,$$

где $dV = dS\,dx$ — величина рассматриваемого объема. Тот же избыток можно представить выражением $\delta\rho\,dV$, а потому

$$\delta\rho = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}. \tag{34.3}$$

Найдем теперь *локальное* приращение диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$. Оно обусловлено, во-первых, тем, что в результате смещения в объем $ABCD$ поступает вещество из других областей пространства, где ε имеет другие значения. Во-вторых, тем, что при смещении каждого элемента среды меняется плотность вещества τ, а с ней и диэлектрическая проницаемость. После смещения из элемента объема $A'B'C'D'$ в элемент $ABCD$ плотность вещества $\tau' \equiv \tau(x')$ получает приращение $\Delta\tau$ и становится равной $\tau' + \Delta\tau$. Так как при этом масса смещенного вещества не меняется, то

$$dx'\tau' = dx\,(\tau' + \Delta\tau),$$

откуда

$$\Delta\tau = \frac{dx' - dx}{dx}\,\tau' = \frac{d\,(x' - x)}{dx}\,\tau',$$

или с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\Delta\tau = -\frac{\partial q}{\partial x}\,\tau.$$

Поэтому в объем $ABCD$ вещество вступает, имея диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon' + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\Delta\tau = \varepsilon' - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Вычитая отсюда значение ε в объеме $ABCD$ до смещения, получим

$$\delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

А так как $\varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon\,(x') - \varepsilon\,(x) = (x' - x)\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -q\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$, то

$$\delta\varepsilon = -q\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{34.4}$$

3. Поскольку электричество смещается вместе с веществом, электрический заряд каждого смещающегося элемента среды при смещении не изменяется. Поэтому, подставив выражения (34.3) и (34.4) в формулу (34.2), получим приращение величины W при постоянном заряде:

$$(dW)_{q,\,T} = -\,dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,\frac{\partial\,(\rho q)}{\partial x}\,dx + \frac{dS}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2 \left(q\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}\right) dx.$$

Интегрируя по частям и имея в виду, что на пределах интеграла все величины обращаются в нуль, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,\frac{\partial\,(\rho q)}{\partial x}\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho q\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\rho E_x\,dx.$$

Таким же путем преобразуется и второй интеграл. В результате получится

$$(dW)_{q,\,T} = -\,dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\rho E_x - \frac{E^2}{8\pi}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,E^2\right)\right] q\,dx.$$

Если $f^{\text{эл}}$ — объемная плотность электрических пондеромоторных сил, действующих в диэлектрике, то работа их при рассматриваемом виртуальном смещении будет

$$\delta A_{\text{эл}} = dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x^{\text{эл}} q\,dx.$$

Подставив эти выражения в формулу (32.2) и имея в виду, что функция $q = q\,(x)$ может быть выбрана какой угодно, найдем $f_x^{\text{эл}}$. К этой силе надо еще добавить силу гидростатического давления $-\partial\mathcal{P}/\partial x$. В результате для x-составляющей объемной плотности полной пондеромоторной силы получится

$$f_x=\rho E_x-\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right)-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x}.$$

Такие же выражения можно написать для y- и z-составляющих силы f. Объединяя их в одну векторную формулу, получим

$$f=-\operatorname{grad}\mathcal{P}+\rho E-\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right). \tag{34.5}$$

4. Повторим теперь приведенный вывод, предполагая, что жидкость является «несжимаемой». Тогда при перемещении любого элемента жидкости из одного места пространства в другое величина ε меняться не будет. Не будет изменяться и упругая часть свободной энергии. В результате в выражении (34.5) выпадут первый и последний члены, и мы получим

$$f=\rho E-\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon. \tag{34.6}$$

В таком виде выражение для пондеромоторной силы было получено Максвеллом. Добавочный член $\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right)$ был введен Гельмгольцем. По величине он того же порядка, что и член $\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon$, учтенный Максвеллом. Однако в случае «несжимаемых» жидкостей применимы оба способа рассуждения, приведенные выше. Поэтому в статических электрических полях должно соблюдаться соотношение

$$\operatorname{grad}\mathcal{P}=\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right), \tag{34.7}$$

или после интегрирования

$$\mathcal{P}=\frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2+\mathrm{const}. \tag{34.8}$$

Это означает, что *добавочная часть пондеромоторной силы, возникающая в результате зависимости диэлектрической проницаемости от плотности жидкости, компенсируется гидростатическим давлением, появляющимся в жидкости при наложении электрического поля. Но в быстропеременных полях такой компенсации нет. Там соотношение* (34.8) *не соблюдается.* Действительно, допустим, что электрическое поле было включено мгновенно. Электрические возмущения распространяются в диэлектриках со скоростями порядка скорости света, упругие — со скоростью звука. Поэтому в быстропеременных полях гидростатическое давление $\mathcal{P}$ не успеет прийти в равновесие с «электрическим давлением» $\frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2$. В этом случае формула (34.7) неприменима.

ЗАДАЧА

Показать, что пондеромоторная сила (34.5) сводится к натяжению вдоль силовых линий (33.8) и давлению (33.9) в перпендикулярном направлении.

Решение. Докажем обратное: считая натяжения и давления известными, найдем результирующую силу f, действующую на единицу объема диэлектрика. Убедимся, что она совпадает с (34.5). Вырежем мысленно в диэлектрике бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными координатным осям (рис. 93). На основание *1* этого параллелепипеда действует сила гидростатического давления $\mathcal{P}(x)\,dy\,dz$, на основание *2* — противоположно направленная сила $-\mathcal{P}(x+dx)\,dy\,dz$. Их результирующая, действующая в положительном направлении оси X, равна

$$[\mathscr{P}(x)-\mathscr{P}(x+dx)]\,dy\,dz=-\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично находятся выражения для сил, действующих вдоль двух других координатных осей. Объединяя их и разделив на объем параллелепипеда $dx\,dy\,dz$, получим полную силу гидростатического давления, отнесенную к единице объема диэлектрика:

$$f_1=-\left(\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\,i+\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y}\,j+\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial z}\,k\right)=$$
$$=-\operatorname{grad}\mathscr{P}.$$

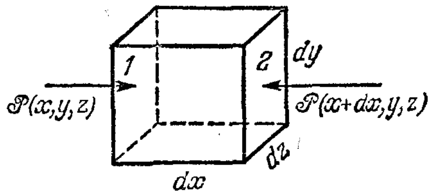

Рис. 93.

К ней надо добавить силу всестороннего изотропного натяжения в электрическом поле:

$$f_2=\operatorname{grad}\left(\frac{\tau}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{d\tau}E^2\right),$$

которая вычисляется так же. Остается найти силу f_3, вызываемую натяжением $\varepsilon E^2/(8\pi)$ вдоль поля и равным ему давлением поперек поля. При вычислении этой силы координатную ось X удобно направить вдоль вектора E. Тогда

$$f_3=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2)\,i-\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E^2)\,j-\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E^2)\,k\right],$$

или

$$f_3=-\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}(\varepsilon E^2)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2)\,i.$$

Преобразуем это выражение. Прежде всего пишем

$$\operatorname{grad}(\varepsilon E^2)=E^2\operatorname{grad}\varepsilon+2\varepsilon E\operatorname{grad}E.$$

Так как вектор E содержит только x-составляющую, то

$$\varepsilon E\operatorname{grad}E=D\operatorname{grad}E_x=D\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\,i+\frac{\partial E_x}{\partial y}\,j+\frac{\partial E_x}{\partial z}\,k\right).$$

Но

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial E_y}{\partial x}=0.$$

Аналогично, $\partial E_x/\partial z=0$. Таким образом,

$$\varepsilon E\operatorname{grad}E=D\frac{\partial E}{\partial x}\,i.$$

Далее,

$$-D\frac{\partial E}{\partial x}\,i+\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2)\,i=E\frac{\partial D}{\partial x}=E\operatorname{div}D=4\pi\rho E.$$

В результате сложения f_1, f_2 и f_3 получается выражение (34.5).

§ 35. Электронная теория поляризации неполярных диэлектриков

1. В § 12 был качественно рассмотрен электронный механизм возникновения поляризации в диэлектриках. Поляризация диэлектриков во всех случаях возникает в результате *смещений* электронов и атомных ядер, которые они испытывают при внесении диэлектрика в электрическое поле. Остановимся теперь на количественной стороне теории.