Представив q в виде $q=\int \rho\, dV$ и преобразовав поверхностный интеграл в объемный $\int \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, dV$, придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\int \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, dV.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объема V, а потому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \qquad (40.5)$$

Формулы (40.4), (40.5) и выражают *закон сохранения заряда в макроскопической электродинамике*. Последняя формула называется также *уравнением непрерывности* или *уравнением неразрывности*. Эти формулы входят в систему основных уравнений Максвелла, хотя и в неявном виде.

Если токи *стационарны*, т. е. не зависят от времени, то формулы (40.4) и (40.5) переходят в

$$\oint j_n\, dS = 0, \qquad (40.6)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \qquad (40.7)$$

В настоящей главе рассматриваются в основном стационарные (постоянные) токи.

§ 41. Закон Ома

1. Одним из главных способов возбуждения электрического тока в телах является создание и поддержание в них электрического поля. Как показывает опыт, для многих тел (например, металлов) в широких пределах плотность электрического тока $\boldsymbol{j}$ пропорциональна напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$. Это — один из важнейших, хотя и не фундаментальных, законов электродинамики. Он называется *законом Ома* (1787—1854). Математически закон Ома выражается формулой

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}, \qquad (41.1)$$

где λ — постоянная для данного материала величина, называемая его *удельной проводимостью* или *электропроводностью*. Она зависит от физического состояния тела (температуры, давления и пр.). Строго говоря, закон Ома справедлив лишь для *физически однородных* тел. Величина, обратная электропроводности, называется *удельным сопротивлением материала*:

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \qquad (41.2)$$

В гауссовой (а следовательно, и в электростатической) системе единиц электропроводность λ имеет размерность, обратную времени. Ее единица есть *обратная секунда* ($с^{-1}$). Удельное сопротивление ρ измеряется в *секундах* (с). Разумеется, совпадение размерностей удельного сопротивления и времени не означает, что эти величины по своей физической природе тождественны. Такое совпадение имеет место только в гауссовой и СГСЭ-системах единиц. В других системах эти величины имеют разные размерности (см. § 44).

2. Если ток стационарный, то объемная плотность электричества в однородном проводнике равна нулю. Действительно, для стационарных токов справедливо уравнение (40.7). Перепишем его в виде $\operatorname{div}(\lambda \boldsymbol{E}) = 0$ или $\operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\boldsymbol{D}\right) = 0$. Так как среда по предположению однородна, то $\lambda = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ и рассматриваемое уравнение сводится к виду $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$. Отсюда с учетом теоремы Гаусса (13.5) находим $\rho = 0$.

Таким образом, *в случае стационарных токов макроскопические электрические заряды могут находиться только на поверхности или в местах неоднородности проводящей среды.* В этом отношении электрическое поле стационарных токов аналогично электростатическому. Аналогия между этими полями идет еще дальше. Если токи стационарны, то плотность электрических зарядов в каждой точке пространства не меняется во времени, хотя и происходит движение электричества: на место уходящих электрических зарядов непрерывно поступают новые. Такие заряды, как показывает опыт (а также уравнения Максвелла), создают в окружающем пространстве такое же кулоновское электрическое поле, что и неподвижные заряды той же плотности. Отсюда следует, что *электрическое поле стационарных токов есть поле потенциальное.*

Тем не менее электрическое поле стационарных токов существенно отличается от электростатического. Электростатическое поле есть кулоновское поле неподвижных зарядов. Внутри проводников при равновесии зарядов оно равно нулю. Электрическое поле стационарных токов есть также *кулоновское поле*, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении. Поэтому поле стационарных токов существует и внутри проводников. Если бы это было не так, то в проводниках не было бы и электрических токов, как это следует из закона Ома (41.1). Силовые линии электростатического поля всегда нормальны к поверхности проводника. Для электрического поля стационарных токов это не обязательно (см. задачу 1 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Параллельные длинные однородные пластинки AB и CD (рис. 109) сделаны из материала, плохо проводящего электричество (например, из дерева). Боковые края их A и C накоротко соединены хорошим проводником (например, металлом), а между краями B и D поддерживается постоянное напряжение V,

Найти напряженность электрического поля и форму электрических силовых линий между пластинками, пренебрегая краевыми эффектами. Расстояние между пластинками равно d, а ширина каждой из них $AB = CD = h$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рис. 109 (ось Z перпендикулярна к плоскости рисунка и параллельна длинным сторонам пластинок). Искомое поле потенциально и удовлетворяет уравнению Лапласа $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$. На проводнике AC (т. е. при $y = 0$) потенциал должен обращаться в постоянную, которую мы примем равной нулю. Искомое решение будет $\varphi = \alpha xy + \beta y$, где α и β — постоянные. В силу симметрии потенциал φ должен менять знак при замене x на $-x$, а потому $\beta = 0$.

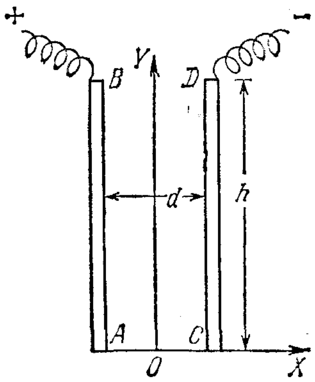

Рис. 109.

Для напряженности поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

Постоянная α найдется по разности потенциалов между точками A и B (или между точками C и D). Потенциалы точек B и D равны соответственно $\varphi_B = +V/2$, $\varphi_D = -V/2$. Напряженность поля E_y на поверхности пластины AB (т. е. при $x = -d/2$) будет $E_y = -V/(2h) = \alpha d/2$, откуда $\alpha = -V/(hd)$. Окончательно

$$E_x = Vy/(hd), \qquad E_y = Vx/(hd).$$

Уравнение силовой линии $dx/E_x = dy/E_y$. имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

откуда $y^2 - x^2 = K$, т. е. силовыми линиями являются равносторонние гиперболы. При $K > 0$ оси гипербол совпадают с осью Y, при $K < 0$ — с осью X. Для выяснения смысла постоянной K обозначим через a расстояние от вершины гиперболы до начала координат. При $K > 0$ координатами вершины гиперболы будут $(0, a)$. Они должны удовлетворять уравнению $a^2 - 0^2 = K$, откуда $K = a^2$. Аналогично, для второго случая ($K < 0$) $K = -a^2$. Таким образом, получаются два семейства гипербол: $y^2 - x^2 = a^2$ и $x^2 - y^2 = a^2$, асимптотами которых являются биссектрисы соответствующих координатных углов (рис. 110). Гиперболические силовые линии первого семейства легко воспроизводятся экспериментально обычным методом, описанным в § 3. Силовые линии второго семейства экспериментально получить трудно из-за малости составляющей поля E_x.

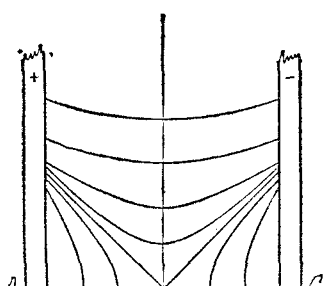

Рис. 110.

2. Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и электропроводность изменяются от $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной электродвижущей силы. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике,

когда в цепи установится постоянный электрический ток $\mathscr{I} = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик в направлении от стороны 1 к стороне 2.

Ответ. $q = \frac{\mathscr{I}}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 78$ СГСЭ-ед. $= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами h_1 и h_2. Диэлектрическая проницаемость и электропроводность первого диэлектрика равны соответственно ε_1 и λ_1, второго ε_2 и λ_2. Найти плотность поверхностных свободных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая установится при наложении на конденсатор постоянного напряжения V.

Ответ. $\sigma = \frac{V}{4\pi}\frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{h_1\lambda_2 + h_2\lambda_1}$.

§ 42. Вывод законов Ома и Джоуля — Ленца

1. Будем предполагать в этом параграфе, что электрическое поле $\boldsymbol{E}$ может меняться во времени. Рассмотрим сначала металлы, хотя наши рассуждения в основном справедливы и в случае других проводящих сред (электролитов, ионизованных газов и пр.). В металлах носителями тока служат *«свободные электроны»*, т. е. электроны, сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки, внутри которой они могут свободно перемещаться. Прямое доказательство этого утверждения дают классические опыты Толмена и Стюарта (см. § 97). В отсутствие электрического поля или других регулярных сил, действующих на электроны, все направления движения последних равновероятны. В этом отношении движение электронов в металле напоминает тепловое движение молекул газа. Назовем такое движение *беспорядочным*, а соответствующую ему скорость электронов будем обозначать через $\boldsymbol{v}_б$. Для последующих рассуждений не имеет значения, является ли беспорядочное движение электронов тепловым или нетепловым (см. т. II, § 4, пункт 3).

2. При наличии регулярной силы на беспорядочное движение электронов накладывается систематическое — *дрейфовое* — движение. Если поле регулярных сил однородно, то все свободные электроны движутся с одной и той же *дрейфовой скоростью*, обозначаемой ниже через $\boldsymbol{v}_д$ или $\boldsymbol{u}$. Полная скорость электрона $\boldsymbol{v}$ складывается из беспорядочной $\boldsymbol{v}_б$ и дрейфовой $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_б + \boldsymbol{u}$. Движение электрона в классической механике описывается уравнением

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \equiv m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_б + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{ст}, \tag{42.1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — регулярная сила, действующая на электрон со стороны внешнего силового поля, а $\boldsymbol{F}_{ст}$ — сила, которую он испытывает при столкновениях с ионами или другими электронами. Если уравнение (42.1) усреднить по всем электронам, то производная $d\boldsymbol{v}_б/dt$ обратится в нуль, а сила $\boldsymbol{F}_{ст}$ заменится ее средним значением $\langle \boldsymbol{F}_{ст} \rangle$. Заметим, что при таком усреднении столкновения между электро-