когда в цепи установится постоянный электрический ток $\mathscr{I} = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик в направлении от стороны 1 к стороне 2.

Ответ. $q=\frac{\mathscr{I}}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}-\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right)=78$ СГСЭ-ед. $=2{,}6\cdot 10^{-8}$ Кл.

3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами h_1 и h_2. Диэлектрическая проницаемость и электропроводность первого диэлектрика равны соответственно ε_1 и λ_1, второго ε_2 и λ_2. Найти плотность поверхностных свободных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая установится при наложении на конденсатор постоянного напряжения V.

Ответ. $\sigma=\frac{V}{4\pi}\frac{\varepsilon_2\lambda_1-\varepsilon_1\lambda_2}{h_1\lambda_2+h_2\lambda_1}$.

§ 42. Вывод законов Ома и Джоуля — Ленца

1. Будем предполагать в этом параграфе, что электрическое поле $\boldsymbol{E}$ может меняться во времени. Рассмотрим сначала металлы, хотя наши рассуждения в основном справедливы и в случае других проводящих сред (электролитов, ионизованных газов и пр.). В металлах носителями тока служат *«свободные электроны»*, т. е. электроны, сравнительно слабо связанные с ионами кристаллической решетки, внутри которой они могут свободно перемещаться. Прямое доказательство этого утверждения дают классические опыты Толмена и Стюарта (см. § 97). В отсутствие электрического поля или других регулярных сил, действующих на электроны, все направления движения последних равновероятны. В этом отношении движение электронов в металле напоминает тепловое движение молекул газа. Назовем такое движение *беспорядочным*, а соответствующую ему скорость электронов будем обозначать через $\boldsymbol{v}_б$. Для последующих рассуждений не имеет значения, является ли беспорядочное движение электронов тепловым или нетепловым (см. т. II, § 4, пункт 3).

2. При наличии регулярной силы на беспорядочное движение электронов накладывается систематическое — *дрейфовое* — движение. Если поле регулярных сил однородно, то все свободные электроны движутся с одной и той же *дрейфовой скоростью*, обозначаемой ниже через $\boldsymbol{v}_д$ или $\boldsymbol{u}$. Полная скорость электрона $\boldsymbol{v}$ складывается из беспорядочной $\boldsymbol{v}_б$ и дрейфовой $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_б+\boldsymbol{u}$. Движение электрона в классической механике описывается уравнением

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\equiv m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_б+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{ст}, \tag{42.1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — регулярная сила, действующая на электрон со стороны внешнего силового поля, а $\boldsymbol{F}_{ст}$ — сила, которую он испытывает при столкновениях с ионами или другими электронами. Если уравнение (42.1) усреднить по всем электронам, то производная $d\boldsymbol{v}_б/dt$ обратится в нуль, а сила $\boldsymbol{F}_{ст}$ заменится ее средним значением $\langle\boldsymbol{F}_{ст}\rangle$. Заметим, что при таком усреднении столкновения между электронами можно не принимать во внимание, так как они (столкновения) не влияют на количество движения $\sum m\boldsymbol{v} \equiv \sum m(\boldsymbol{v}_б + \boldsymbol{u})$ всей системы электронов, которое только и входит в вычисление среднего значения скорости $\boldsymbol{v}$. Таким образом, под $\boldsymbol{F}_{ст}$ следует понимать силы, действующие на электроны при их столкновениях только с ионами кристаллической решетки. При отсутствии дрейфового движения средняя сила $\boldsymbol{F}_{ст}$ обращается в нуль. При наличии дрейфового движения этого не будет. При малых дрейфовых скоростях величину $\boldsymbol{F}_{ст}$ можно разложить по степеням $\boldsymbol{u}$ и ограничиться при этом линейным членом:

$$\boldsymbol{F}_{ст} = -m\frac{\boldsymbol{u}}{\tau_{ин}}, \tag{42.2}$$

где $\tau_{ин}$ — постоянная, имеющая размерность времени. В этом приближении уравнение для дрейфового движения электрона принимает вид

$$m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + m\frac{\boldsymbol{u}}{\tau_{ин}} = \boldsymbol{F}. \tag{42.3}$$

Сила $\boldsymbol{F}_{ст}$, а с ней и время $\tau_{ин}$ обусловлены инерцией электронов. Поэтому величину $\tau_{ин}$ можно назвать *инерционным временем* электрона в металле. Конкретное представление о времени $\tau_{ин}$ дает следующий пример. Предположим, что $\boldsymbol{F} = 0$ и что в начальный момент времени $t = 0$ электроны совершают дрейфовое движение со скоростью $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$. Тогда из уравнения (42.3) получаем

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 e^{-t/\tau_{ин}}, \tag{42.4}$$

т. е. в отсутствие внешних регулярных сил дрейфовое движение экспоненциально затухает во времени таким образом, что за время $\tau_{ин}$ скорость u убывает в e раз.

Воспользовавшись соотношением $\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u}$ и введя обозначение

$$\lambda = \frac{ne^2\tau_{ин}}{m}, \tag{42.5}$$

преобразуем уравнение (42.3) к виду

$$\boldsymbol{j} + \tau_{ин}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \lambda\frac{\boldsymbol{F}}{e}. \tag{42.6}$$

Если регулярная сила $\boldsymbol{F}$ и коэффициент λ постоянны, то из (42.6) получаем

$$\boldsymbol{j} = \lambda\frac{\boldsymbol{F}}{e} + \boldsymbol{j}_0 e^{-t/\tau_{ин}}.$$

При $t \gg \tau_{ин}$

$$\boldsymbol{j} = \lambda\frac{\boldsymbol{F}}{e}. \tag{42.7}$$

Все полученные соотношения верны независимо от природы регулярной силы $\boldsymbol{F}$, возбуждающей электрический ток. Если ток возбуждается электрическим полем $\boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$. Тогда соотношение (42.6) переходит в

$$\boldsymbol{j} + \tau_{\text{ин}} \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{42.8}$$

а при $\boldsymbol{E} = \text{const}$ — в

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}. \tag{42.9}$$

Это — *закон Ома* при условии, что концентрация свободных электронов n и инерционное время $\tau_{\text{ин}}$ постоянны, т. е. не зависят от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, причем электропроводность λ определяется выражением (42.5). Закон Ома (42.9) верен и для переменных полей, как это непосредственно следует из формулы (42.8). Требуется только, чтобы за время $\tau_{\text{ин}}$ ток менялся пренебрежимо мало, т. е. выполнялось условие

$$\left| \tau_{\text{ин}} \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} \right| \ll |\boldsymbol{j}|. \tag{42.10}$$

3. *Инерционное время электрона в металле можно выразить через среднее время свободного пробега электрона между двумя последовательными столкновениями его с ионами решетки.* Так как масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с массой иона, то можно принять, что при каждом столкновении с ионом электрон полностью утрачивает свое упорядоченное движение. От беспорядочного движения можно отвлечься, так как оно на величину тока не влияет. Иначе говоря, можно принять, что при каждом столкновении скорость электрона обращается в нуль. Проведем сначала упрощенный расчет в предположении, что время свободного пробега между двумя последовательными столкновениями τ одно и то же для всех электронов и для всех столкновений. Будем предполагать, что электрон движется в постоянном электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Претерпев столкновение, электрон начинает двигаться с постоянным ускорением $\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}/m$. К следующему столкновению он приходит со скоростью $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\tau$, так что его средняя скорость между двумя последовательными столкновениями будет $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\tau/2$, а плотность тока $\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\boldsymbol{E}$. Следовательно,

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}. \tag{42.11}$$

В этих упрощающих предположениях $\tau_{\text{ин}} = \tau/2$.

Приведенный расчет не вполне точен, даже если сохранить идеализацию, что при каждом столкновении электрон полностью утрачивает упорядоченную скорость. Расчет не принимает во внимание, что время свободного пробега τ меняется от столкновения к столкновению. Для учета этого обстоятельства рассмотрим какой-либо один электрон, претерпевший много столкновений. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ времена свободного пробега электрона между последовательными столкновениями, а через $u_1, u_2, \ldots, u_N$ — средние упорядоченные скорости на этих временах. Тогда средняя упорядоченная скорость за все время движения представится выражением

$$\bar{u} = \frac{\sum \tau_i u_i}{\sum \tau_i} = \frac{a}{2} \frac{\sum \overline{\tau_i^2}}{\sum \tau_i}.$$

Разделив числитель и знаменатель на N и перейдя к пределу $N \to \infty$, запишем это выражение в виде $u = a\overline{\tau^2}/(2\bar{\tau})$, где $\bar{\tau}$ и $\overline{\tau^2}$ — средние значения времени свободного пробега электрона и его квадрата:

$$\bar{\tau} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum \tau_i, \qquad \overline{\tau^2} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum \tau_i^2.$$

Те же средние значения τ и τ^2 будут характеризовать не только какой-либо определенный электрон, но и всю совокупность электронов. Таким образом, для электропроводности λ теперь следует написать

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m} \frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}},$$

а потому $\tau_{\text{ин}} = \overline{\tau^2}/(2\bar{\tau})$. В частном случае, когда все времена $\tau_1, \tau_2, \ldots$ одинаковы, получится прежний результат (42.11).

Выразим теперь отношение $\overline{\tau^2}/\bar{\tau}$ через среднее время свободного пробега электрона $\bar{\tau}$. Возьмем пучок электронов, состоящий из n_0 частиц, находящихся в момент времени $t = 0$ в одинаковых условиях. При дальнейшем движении эти частицы будут сталкиваться с ионами решетки и выбывать из пучка. Пусть $n(t)$ — число частиц, оставшихся в пучке ко времени t. Среднее число частиц $-dn$, выбывших из пучка вследствие столкновений между t и $t + dt$, пропорционально n и может быть представлено выражением $-dn = \alpha n\, dt$, где α — положительная постоянная. Отсюда $n = n_0 e^{-\alpha t}$. Каждая из этих $(-dn)$ частиц двигалась без столкновений в течение времени t. Поэтому

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{n_0} \int t\, dn, \qquad \overline{\tau^2} = -\frac{1}{n_0} \int t^2\, dn.$$

Интегрируя по частям, преобразуем второй интеграл:

$$\overline{\tau^2} = \int_0^\infty t^2\, de^{-\alpha t} = -2 \int_0^\infty t e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{2}{n_0} \int t\, dn = 2\bar{\tau}.$$

Таким образом, $\overline{\tau^2}/(2\bar{\tau}) = \bar{\tau}$, и, следовательно, $\tau_{\text{ин}} = \bar{\tau}$,

$$\lambda = \frac{ne^2}{m} \bar{\tau}. \tag{42.12}$$

Тем не менее мы будем пользоваться иногда и упрощенной формулой (42.11). Дело в том, что в кинетической теории газов при изучении явлений переноса мы вводили те же упрощения, что и при выводе формулы (42.11), т. е. предполагали, что длины и времена свободного пробега одинаковы для всех молекул и всех столкновений. Было бы непоследовательно при сопоставлении кинетической теории газов с теорией электропроводности вводить различные упрощающие предположения и производить вычисления с различной точностью.

Отметим еще физический смысл постоянной α. Для этого выразим ее через время $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{n_0}\int t\,dn = \int_0^\infty t\,de^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$n = n_0 e^{-t/\bar{\tau}}. \tag{42.13}$$

Эта формула вполне аналогична формуле (88.3) из второго тома нашего курса.

4. Вместо инерционного времени $\tau_{\text{ин}}$ или среднего времени свободного пробега $\bar{\tau}$ можно ввести другие параметры, связанные с этими временами. Часто используют *подвижность частицы* (электрона). Подвижностью частицы называют величину дрейфовой скорости, приобретаемой частицей либо под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$, равной единице, либо под действием постоянного электрического поля $\boldsymbol{E}$, также равного единице. Первую подвижность будем обозначать большой буквой B, вторую — малой b (см. также т. II, § 64). Таким образом,

$$\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{F} = b\boldsymbol{E}. \tag{42.14}$$

Обе подвижности связаны соотношением

$$b = |e|\,B. \tag{42.15}$$

Через подвижность электропроводность λ выражается формулой

$$\lambda = Be^2 n = b\,|e|\,n. \tag{42.16}$$

Понятием подвижности всегда пользуются при рассмотрении электрических токов в электролитах и ионизованных газах. В этих случаях имеется несколько типов носителей тока — положительных и отрицательных ионов. Для получения электропроводности λ выражение (42.16) надо просуммировать по всем типам носителей. Например, в растворах электролитов имеются два типа ионов, и вместо формулы (42.16) следует писать

$$\lambda = B^- e_-^2 n^- + B^+ e_+^2 n^+ = b^-\,|e_-|\,n^- + b^+\,|e_+|\,n^+, \tag{42.17}$$

где индекс «—» относится к отрицательным, а индекс «+» к положительным ионам.

Выражение (42.17) можно упростить, использовав то обстоятельство, что для возбуждения электрических полей, встречающихся в действительности, требуется ничтожное разделение положительных и отрицательных зарядов, которым при вычислении можно полностью пренебречь (см. § 10). Иными словами, можно считать, что электролит (или газ) *электрически нейтрален* (точнее, *квазинейтрален*), т. е. для него с большой точностью выполняется соотношение

$$\sum n_i e_i = 0. \tag{42.18}$$

В частности, если заряды положительных и отрицательных ионов одинаковы по абсолютной величине, это соотношение переходит в $n^- = n^+$, т. е. в равенство концентраций обоих ионов. В этом случае, если опустить индексы при n и e, получим

$$\lambda = (B^- + B^+)\, e^2 n = (b^- + b^+)\, |e|\, n. \tag{42.19}$$

5. Приведенные рассуждения (в согласии с опытом) приводят к заключению, что при определенных условиях возможны отклонения от закона Ома и даже полное несоблюдение этого закона. *Для справедливости закона Ома необходимо, чтобы концентрации* носителей тока и инерционные времена $\tau_{\text{ин}}$ (или соответствующие им подвижности) при прохождении тока оставались постоянными. Необходимо также, чтобы в переменных полях инерция носителей тока не играла никакой роли; количественно это условие, как уже отмечалось выше, сводится к требованию, чтобы изменения тока за времена порядка $\tau_{\text{ин}}$ были пренебрежимо малы. В случае периодических переменных электрических полей это означает, что период изменения поля T должен быть очень велик по сравнению с $\tau_{\text{ин}}$.

Закон Ома может нарушаться в *сильных полях*, где могут проявляться нелинейные эффекты. В таких случаях при разложении средней силы $\langle \boldsymbol{F}_{\text{ст}} \rangle$ по степеням $\boldsymbol{u}$ линейное приближение (42.2) уже недостаточно. *Сильными* мы называем такие поля, в которых на протяжении среднего свободного пробега носитель тока приобретает скорость, сравнимую со скоростью беспорядочного движения. Количественно условие слабости поля записывается в виде

$$F\tau \ll mv_б \quad \text{или} \quad eE\tau \ll mv_б. \tag{42.20}$$

Посмотрим, соблюдается ли условие (42.20) при прохождении электрического тока в металлах. В качестве примера возьмем медь. Ее электропроводность $\lambda = 5{,}3 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$ (при 20 °С), плотность $\rho = 8{,}9$ г/см^3, атомный вес $A = 63$. Если ввести правдоподобное предположение, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, то концентрация свободных электронов будет

$$n = \frac{N\rho}{A} \approx 8{,}5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$$

(N — число Авогадро). Инерционное время электрона вычислим по электропроводности λ:

$$\tau_{\text{ин}} = \frac{m\lambda}{ne^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-14} \text{ с}.$$

(Подвижность электрона $b = e\tau_{\text{ин}}/m = 1{,}3 \cdot 10^4$ СГСЭ-ед. $= 44$ см^2/(с$\cdot$В).) Средняя беспорядочная скорость электронов, если ее оценить по формулам классической кинетической теории газов, будет $v_б \approx \sqrt{3kT/m} \approx 10^7$ см/с. В действительности она примерно на порядок больше, так как для свободных электронов в металлах надо пользоваться не классической статистикой Больцмана, а квантовой статистикой Ферми (см. т. II, § 82). С учетом этого обстоятельства берем $v_б \sim 10^8$ см/с. Тогда для промежуточных значений между слабыми и сильными полями получаем $E \sim mv_б/(e\tau) \sim 0{,}75 \cdot 10^4$ СГСЭ-ед. $\sim 2 \cdot 10^8$ В/м. Только начиная с таких полей, могли бы проявиться *нелинейные эффекты* при прохождении электрического тока через металл. На самом деле такие поля в металлах невозможны: они мгновенно превратили бы металл в пар. Наибольшая технически допустимая плотность тока в медных проводах принимается равной $j = 10^3$ А/см^2 $= 3 \cdot 10^{12}$ СГСЭ-ед. Ей соответствует напряженность электрического поля $E = j/\lambda \approx 0{,}5 \times 10^{-5}$ СГСЭ-ед. $\approx 0{,}15$ В/м, что в 10^9 раз меньше вычисленной выше величины. С этим обстоятельством и связана применимость закона Ома к металлам.

В ионизованных газах закон Ома не соблюдается. При низких давлениях кинетическая энергия, приобретаемая электроном за время свободного пробега, даже в слабых электрических полях становится сравнимой с энергией теплового движения kT. Поэтому уже в таких полях линейное приближение (42.2) становится недействительным и наблюдаются *отступления* от закона Ома. При возрастании напряженности поля энергия электронов становится достаточной, чтобы ионизовать атомы и молекулы газа. Концентрации ионов, а потому и ток в газе сильно возрастают. При дальнейшем увеличении напряженности поля наступает *электрический пробой* газа (искра).

В местах контакта между полупроводниками или между полупроводниками и металлами могут происходить резкие нарушения закона Ома. Эти места являются типичными «*нелинейными*», или «*неомическими*», проводниками тока, т. е. такими проводниками, в которых связь между $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ нелинейна. Их проводимость может быть даже *односторонней*, т. е. ток через них может проходить практически только в одном направлении. Практическое значение нелинейных проводников трудно переоценить. Современная радиотехника и электроника были бы невозможны, если бы все тела, проводящие электричество, подчинялись закону Ома.

6. Над электроном, движущимся со скоростью $\boldsymbol{v}$ в однородном силовом поле, ежесекундно совершается работа $\boldsymbol{vF} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_б)\,\boldsymbol{F}$. При суммировании по всем электронам члены $\boldsymbol{v}_б\boldsymbol{F}$ дают нуль. Остается только регулярная работа, связанная с дрейфовым движением электронов. Эта работа, совершаемая над электронами единицы объема металла, равна $n\boldsymbol{uF} = \boldsymbol{jF}/e$. В металлах она идет на приращение *внутренней* (*тепловой*) энергии, поскольку прохождение электрического тока не сопровождается изменениями внутренней структуры металла. Таким образом, *мощность тепла*, выделяемого током в единице объема проводника, дается выражениями

$$Q = \frac{1}{e}\,(\boldsymbol{jF}) = \frac{\lambda}{e^2}\,\boldsymbol{F}^2 \tag{42.21}$$

или

$$Q = \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{j}^2. \tag{42.22}$$

Последняя формула выражает *закон Джоуля—Ленца в локальной (дифференциальной) форме*: мощность тепла в единице объема Q пропорциональна квадрату плотности электрического тока и обратно пропорциональна электропроводности среды. В такой форме закон Джоуля—Ленца носит совершенно *общий характер*, т. е. *не зависит от природы сил*, возбуждающих электрический ток. Если сила $\boldsymbol{F}$ чисто электрическая ($\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$), то

$$Q = (\boldsymbol{jE}) = \lambda \boldsymbol{E}^2. \tag{42.23}$$

Из изложенного ясно, что выражение (42.23) носит менее общий характер, чем (42.22).

Закон Джоуля—Ленца, как показывает опыт, справедлив и для электролитов. Отсюда следует, что работа электрического поля в электролитах не тратится на образование ионов. Ионы в растворе образуются в результате *диссоциации молекул* при растворении (электролитическая диссоциация). Приложенное электрическое поле к этому процессу не имеет отношения.

7. Изложенная классическая теория без существенных изменений, сохраняется и в квантовой физике. Однако классическая теория носит *кинематический характер*, поскольку она не определяет подвижности и концентрации носителей тока. Для этого требуется *динамическая теория*. Попытки создать такую теорию на классической основе всегда приводили к резким противоречиям с опытом. Только квантовая теория позволяет (или позволяет в принципе) построить и динамическую теорию электропроводности, согласующуюся с опытом.

8. Приведем в заключение один результат, полученный классической теорией. Хотя его классический вывод и неверен, но самый результат оказался верным. Речь идет о связи между электропроводностью и теплопроводностью металлов. Металлы — хорошие проводники не только электричества, но и тепла. Это связано с тем, что переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы — *свободные электроны*. Роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. Применяя к электронной теплопроводности формулы кинетической теории газов (см. т. II, § 89), для теплопроводности металла можно написать

$$\chi = \frac{1}{3} n \bar{v} c_v \bar{l}, \tag{42.24}$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость беспорядочного движения электронов, c_v — теплоемкость электронного газа при постоянном объеме, приходящаяся на один электрон, $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега электрона. В том же приближении выведена формула (42.11). Запишем ее в виде

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m\bar{v}} \frac{\bar{l}}{\bar{v}}. \tag{42.25}$$

Почленным делением (42.24) на (42.25) находим

$$\frac{\chi}{\lambda} \approx \frac{2}{3} \frac{m\bar{v}^2}{e^2} c_v. \tag{42.26}$$

Эта формула сохраняется и в квантовой теории. Однако квантовая теория применяет к электронам в металлах статистику Ферми — Дирака, а классическая — статистику Больцмана (что неправильно). В соответствии с этим в классической теории полагают $c_v = \frac{3}{2} k$, $m\overline{v^2} \approx 3kT$ и получают

$$\frac{\chi}{\lambda} = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \tag{42.27}$$

(Мы не учитываем разницы между $\overline{v^2}$ и $\bar{v}^2$. Учет этой разницы в излагаемой приближенной теории был бы превышением точности расчета.)

Формула (42.27) была получена Друде (1863—1906). Друде, как и мы, не учитывал распределения электронов по скоростям. Лоренц, учтя максвелловское распределение тепловых скоростей электронов, получил такую же формулу, но с численным коэффициентом 2 вместо 3. Важно, однако, не значение численного коэффициента, а то, что отношение χ/λ пропорционально абсолютной температуре T и для всех металлов одно и то же (закон Видемана — Франца). Этот результат довольно хорошо подтвердился на опыте и долгое время считался доказательством правильности исходных положений классической теории электропроводности и теплопроводности металлов, несмотря на то, что в вопросе о теплоемкости электронов в металлах эта теория приводила к резкому противоречию с опытом (см. т. II, §§ 69 и 84). Противоречие было устранено Зоммерфельдом (1868—1951), который применил статистику Ферми — Дирака к проблеме электропроводности, теплопроводности и теплоемкости электронного газа в металлах. Он снова получил формулу (42.27) с коэффициентом $\pi^2/3$ вместо 3. Таким образом, классическая теория Друде и квантовая теория Зоммерфельда приводили фактически к одинаковым результатам. Такое совпадение результатов объясняется тем, что классическая теория пользовалась неправильными значениями для $\overline{v^2}$ и c_v. Эти две ошибки случайно компенсировали друг друга, так что произведение $\overline{v^2}c_v$ фактически получилось правильным. В § 99 этот вопрос будет разобран подробно.

ЗАДАЧИ

1. Найти вероятность того, что между моментами времени t_1 и $t > t_1$ свободный электрон в металле не претерпевает столкновений с ионами решетки. Электрическое поле в металле $E = 0$.

Решение. Так как электрического поля нет, то все моменты времени вполне эквивалентны. В силу этого искомая вероятность может зависеть не от времен t и t_1 в отдельности, а только от их разности $t - t_1$. Обозначим эту вероятность через $f(t - t_1)$. Возьмем теперь второй момент времени t_2, более ранний, чем t_1. Вероятность события, что электрон не претерпит столкновений в промежутке времени $t - t_2$, будет $f(t - t_2)$. Но это событие можно рассматривать как сложное. Оно состоит из последовательности двух статистически независимых событий: 1) события, что электрон не претерпевает столкновений в интервале времени (t_2, t_1), и 2) события, что в интервале (t_1, t) он также не испытывает столкновений. По теореме умножения вероятностей вероятность этого сложного события может быть представлена произведением $f(t - t_2) = f(t_1 - t_2)\, f(t - t_1)$. Решением этого уравнения является

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \tag{42.28}$$

где α — постоянная. Очевидно, она положительна, так как с возрастанием аргумента t функция $f(t)$ должна убывать. Таким образом,

$$f(t - t_0) = e^{-\alpha(t - t_0)}. \tag{42.29}$$

Найдем теперь вероятность того, что электрон претерпел столкновение между t и $t + dt$. Очевидно, она равна

$$dw = f(t - t_0) - f(t + dt - t_0) = -\frac{df}{dt}\,dt,$$

или

$$dw = \alpha e^{-\alpha(t - t_0)}\,dt. \tag{42.30}$$

Простым интегрированием убеждаемся, что эта вероятность нормирована к единице:

$$\int dw = \int_{t_0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha(t - t_0)}\,dt = 1.$$

Так и должно быть, поскольку столкновение электрона на бесконечном интервале времени (t_0, ∞) есть достоверное событие. Постоянную α можно выразить через среднее время свободного пробега электрона $\bar{\tau}$ между двумя последовательными столкновениями его с ионами. Очевидно,

$$\bar{\tau} = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)\,dw = \alpha \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha(t - t_0)}\,(t - t_0)\,dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Поэтому

$$f(t-t_0)=e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}. \qquad (42.31)$$

2. Разъяснить следующий парадокс. Вероятность того, что последнее столкновение электрона произошло между t_0 и t_0+dt_0, равна

$$dw=f[t-(t_0+dt_0)]-f(t-t_0)=\frac{df}{dt_0}dt_0,$$

или

$$dw=\alpha e^{-(t-t_0)}dt_0. \qquad (42.32)$$

До момента времени t электрон в среднем двигался без столкновений в течение времени

$$\int(t-t_0)\,dw=\int\limits_{-\infty}^{t}(t-t_0)\,\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt_0=\frac{1}{\alpha},$$

т. е. такое же время, какое он затратит в среднем до следующего столкновения.

Рассмотрим теперь движение электрона между двумя последовательными столкновениями. Пусть момент времени t лежит где-то между моментами столкновений. Пусть от первого столкновения до момента t электрон затрачивает время T_1, а от момента t до второго столкновения — время T_2. Тогда время между столкновениями будет $T=T_1+T_2$. Усредняя это время, получим $\overline{T}=\overline{T}_1+\overline{T}_2$. Но согласно доказанному $\overline{T}_1=\overline{T}_2=\overline{\tau}$. Таким образом, среднее время свободного пробега электрона между двумя последовательными столкновениями будет $\overline{T}=2\overline{\tau}$. На самом деле оно равно $\overline{\tau}$.

Решение. Соотношение $\overline{T}=\overline{T}_1+\overline{T}_2$ неверно, так как операция усреднения времени T имеет другой смысл, чем операции усреднения времени T_1 и T_2. Возьмем, например, пучок электронов, одновременно претерпевших столкновения. Пусть число частиц в пучке непосредственно после столкновения равно n_0. Для вычисления $\overline{T}$ надо усреднить T по всем n_0 электронам. Но электроны выбывают из пучка из-за столкновений. Пусть к моменту t их останется в пучке n. Для нахождения $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ надо усреднять T_1 и T_2 уже по меньшему числу частиц n. Благодаря этому правильное соотношение между средними временами будет $\overline{T}=\overline{T}_1=\overline{T}_2=\overline{\tau}$.

3. Применить результаты, полученные в задачах 1 и 2, к вычислению плотности тока в металле, введя предположение, что после каждого столкновения электрон полностью утрачивает упорядоченную скорость. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ считать слабым, однородным и зависящим от времени.

Решение. В слабых полях формулы (42.31) и (42.32) остаются верными. Если электрон претерпел последнее столкновение в момент t_0, то за время $t-t_0$ его скорость получит приращение

$$\Delta\boldsymbol{v}=\frac{e}{m}\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{E}(t')\,dt'. \qquad (42.33)$$

Усредняя это выражение по всем электронам, мы и найдем упорядоченную (дрейфовую) скорость электрона в электрическом поле:

$$\boldsymbol{u}=\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle=\int\Delta\boldsymbol{v}\,dw=\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{t}\Delta\boldsymbol{v}\,e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\,dt_0.$$

Введем временное обозначение $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}\xi$, где $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор в направлении электрического поля $\boldsymbol{E}$. Величину ξ при интегрировании, конечно, надо рассматривать как функцию аргумента t_0. Имея это в виду, интегрированием по частям находим

$$u = \Delta v e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}}\Bigg|_{t_0=-\infty}^{t_0=t} - k\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}}\,d\xi.$$

Множитель Δv, как видно из формулы (42.33), обращается в нуль на верхнем пределе $t_0 = t$. На нижнем же пределе $t_0 = -\infty$ обращается в нуль экспоненциальный множитель. Таким образом, в правой части последнего выражения остается только второе слагаемое. Подставляя в него $d\xi = -eE(t_0)\,dt_0/m$ и выполняя интегрирование, получим

$$u = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} E(t_0)\,e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}}\,dt_0.$$

Плотность тока

$$j = neu = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} E(t_0)\,e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}}\,dt_0.$$

Для исключения входящего сюда интеграла дифференцируем последнее выражение по t и находим

$$\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2}{m}E(t) - \frac{ne^2}{m\bar{\tau}}\int_{-\infty}^{t} E(t_0)\,e^{-\frac{t-t_0}{\bar{\tau}}}\,dt_0.$$

Следовательно,

$$j + \bar{\tau}\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2\bar{\tau}}{m}E$$

в согласии с ранее полученными результатами.

§ 43. Сторонние силы. Концентрационный элемент

1. Допустим, что единственными источниками электрического поля $\boldsymbol{E}$ в проводниках, по которым текут токи, являются электрические заряды, возбуждающие поля по закону Кулона. При прохождении тока непрерывно происходит убыль зарядов, точнее, нейтрализация положительного и отрицательного электричеств. Для того чтобы напряженность поля $\boldsymbol{E}$, а с ней и плотность электрического тока $\boldsymbol{j}$ оставались неизменными, необходимы какие-то дополнительные силы или процессы, непрерывно пополняющие электрические заряды.

Плотность электрического тока, как видно из формулы (42.7), определяется полной силой $\boldsymbol{F}$, действующей на электрон или другой носитель зарядов. Силу $\boldsymbol{F}$ можно разложить на две части: силу электрическую и силу неэлектрическую, включающую в себя все прочие силы. Эти прочие силы принято называть *сторонними*. В соответствии с этим полагаем $\boldsymbol{F}/e = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}$, где $\boldsymbol{E}^{\text{стор}}$ — *напряженность поля сторонних сил*, т. е. сторонняя сила, отнесенная к единице заряда. С учетом сторонних сил закон Ома записывается в виде

$$\boldsymbol{j} = \lambda(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}). \qquad (43.1)$$